Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Τομέας Πολιτικής Οικονομίας

Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Οκτώβριος 2009

Βασικές αρχές της Θεωρίας Αρίστου Ελέγχου (Optimal Control Theory) και το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Ramsey

---

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται στο βιβλίο του Ronald SHONE (2002), *Economic Dynamics: Phase Diagrams and Their Economic Application*, Cambridge University Press, 2η έκδοση.

Το υπόδειγμα Ramsey αποτελεί μια μαθηματική εφαρμογή της θεωρίας του **αρίστου ελέγχου** (optimal control theory). Η θεωρία αυτή αποτελεί δυναμική επέκταση της θεωρίας της μεγιστοποίησης υπό περιορισμό. Έχουμε δύο τύπους μεταβλητών, τις **μεταβλητές ορισμού** (state variables) και τις **μεταβλητές ελέγχου** (control variables). Όπως υποδηλώνει το όνομά τους μπορούμε να επηρεάσουμε τις μεταβλητές ελέγχου, ενώ το δυναμικό μας σύστημα περιγράφεται από την συμπεριφορά των state variables. Στην γενική περίπτωση μπορεί να έχουμε n μεταβλητές ορισμού $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ που τις περιγράφουμε συνοπτικά με ένα n-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{x}(t)=\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ και m μεταβλητές ελέγχου $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ που τις περιγράφουμε συνοπτικά με ένα m-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{u}(t)=\{u_1(t),\ldots,u_m(t)\}$ Ένα πρόβλημα δυναμικής μεγιστοποίησης ξεκινά από την *αντικειμενική συνάρτηση J* που επιδιώκουμε να μεγιστοποιήσουμε. Η μεγιστοποίηση αυτή γίνεται μέσα σε ένα χρονικό διάστημα από t_0, που είναι ο αρχικός χρόνος, έως t_1 που είναι ο τελικός χρόνος. Φυσικά τα t_0 και t_1, μπορεί να είναι 0 και ∞.

Η μεγιστοποιητέα συνάρτηση περιλαμβάνει δύο όρους: ο πρώτος όρος είναι ένα χρονικό ολοκλήρωμα από t_0 έως t_1, μιας συνάρτησης $V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ που την αποκαλούμε **ενδιάμεση συνάρτηση** (intermediate function) και η οποία περιλαμβάνει τις μεταβλητές ορισμού, τις μεταβλητές ελέγχου και ενδεχομένως τον χρόνο. Λέω ενδεχομένως, διότι ο χρόνος υπεισέρχεται έτσι και αλλιώς μέσω των μεταβλητών ορισμού και ελέγχου που είναι συνεχείς χρονικές μεταβλητές, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί ο ίδιος ο χρόνος ανεξάρτητα από τις μεταβλητές να αποτελεί ανεξάρτητη μεταβλητή της ενδιάμεσης συνάρτησης. Στο παράδειγμα που θα ακολουθήσει δεν θα ασχοληθούμε όμως με αυτή την περίπτωση.

Ο δεύτερος όρος του γενικού προβλήματος της μεγιστοποίησης είναι μια **τελική συνάρτηση** (final function), που εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής ορισμού στον τελικό χρόνο, δηλ., $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{\mathbf{1}}$ και ενδεχομένως από τον χρόνο. Η συνάρτηση αυτή είναι η $F(\mathbf{x}^{\mathbf{1}}, t)$. Θέλουμε δηλαδή να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα του ολοκληρώματος της ενδιάμεσης συνάρτησης και αυτό που θα μείνει στο τέλος και που εξαρτάται από το ποια θα είναι η τιμή της μεταβλητής ορισμού στον τελικό χρόνο. Ένα παράδειγμα: Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου που αποδίδει κάθε χρονική στιγμή (χωρίς προεξόφληση) μαζί με το ποσό που θα μείνει στο τέλος.

Μια άλλη σημαντική εξίσωση στο πρόβλημα της δυναμικής μεγιστοποίησης είναι η **εξίσωση κίνησης** (equation of motion) του συστήματος η οποία μας δείχνει πως μεταβάλλονται οι μεταβλητές ορισμού, συναρτήσει των μεταβλητών ορισμού και ελέγχου (και ενδεχομένως του χρόνου). Αυτή η εξίσωση κίνησης είναι ένα διάνυσμα που περιγράφει για κάθε μεταβλητή ορισμού την πρώτη παράγωγο ως προς τον χρόνο συναρτήσει των $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$ και του χρόνου *t*. Δηλ., έχουμε $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$. Τέλος, έχουμε ένα σύνολο U που μας δείχνει τις επιτρεπτές τιμές των μεταβλητών ελέγχου.

Συνοψίζοντας έχουμε:

Το πρόβλημα του άριστου ελέγχου (συνεχής περίπτωση)

Μεγιστοποιείστε την αντικειμενική συνάρτηση

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt + F(\mathbf{x}^1, t)$$

με τους εξής περιορισμούς

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ &\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \\ &\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1 \\ &\{\mathbf{u}(t)\} \in U \end{aligned}$$

όπου

t_0 (or $t = 0$) είναι ο αρχικός χρόνος (**initial time**)

t_1 (or T) είναι ο τελικός χρόνος (**terminal time**)

$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ n μεταβλητές ορισμού (**state variables)**

$\mathbf{u}(t) = \{u_1(t), \ldots, u_m(t)\}$ m μεταβλητές ελέγχου (**control variables)**

$\{\mathbf{u}(t)\}$ είναι μία συνεχής τροχιά ελέγχου (continuous **control trajectory)** $t_0 < t < t_1$

U είναι το σύνολο των επιτρεπτών τροχιών ελέγχου (**set of admissible control trajectories)**

$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ δείχνει τις εξισώσεις κίνησης (**equations of motion)**

J είναι η αντικειμενική συνάρτηση (**objective function)**

$V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ είναι η ενδιάμεση συνάρτηση (**intermediate function)**

$F(\mathbf{x}^1, t)$ είναι η τελική συνάρτηση **(final function)**

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που έχουμε μια μεταβλητή ελέγχου και μια μεταβλητή ορισμού, χωρίς τελική συνάρτηση και ο χρόνος να εισέρχεται στη συνάρτηση μέσω των μεταβλητών.

Δηλ., έχουμε

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_0^T V(x, u)dt$$

και $\dot{x} = f(x, u)$

Σημ. Για απλοποίηση γράφουμε $x = x(t), u = u(t)$ δηλ., δεν συμβολίζουμε τον χρόνο, χωρίς όμως να σημαίνει ότι οι μεταβλητές μας παύουν να είναι χρονικές μεταβλητές. Τον αρχικό και τελικό χρόνο τους συμβολίζουμε με t και T αντίστοιχα.

Η λύση του προβλήματος της δυναμικής αριστοποίησης οφείλεται στο τυφλό Σοβιετικό Ρώσο μαθηματικό Lev Semenovich Pontryagin (Лев Семёнович Понтрягин) (1908–1988) το 1959.

Η αρχή του μεγίστου του Pontryagin

Ορίστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση (**Hamiltonian function)** ως

$$H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u)$$

Όπου λ είναι η **μεταβλητή συνορισμού** (costate variable**)**, το ισοδύναμο του πολλαπλασιαστή Lagrange στη δυναμική βελτιστοποίηση.

Προκειμένου να λύσετε το πρόβλημα της δυναμικής μεγιστοποίησης, προσθέστε την μεταβλητή συνορισμού λ, ορίστε την Hamiltonian $H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u)$ και λύστε ως προς τις τροχιές $\{u(t)\}, \{\lambda(t)\}, \{x(t)\}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\quad \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad 0 \le t \le T$

(2) $\quad \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \qquad 0 \le t \le T$

(3) $\quad \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u)$

(4) $\quad x(0) = x^0$

(5) $\quad \lambda(T) = 0$ (ή $x(T) = x^T$, αν το x^T είναι άγνωστο).

Παράδειγμα

Πρόβλημα ελέγχου

$$\max_{\{u\}} \int_0^1 u^2 dt$$

$$\dot{x} = -u$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 0$$

Η Hamiltonian είναι $H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u) = u^2 + \lambda(-u)$

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως είναι

(1) $\frac{\partial H}{\partial u} = 2u - \lambda = 0 \qquad 0 \le t \le 1$

(2) $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad 0 \le t \le 1$

(3) $\dot{x} = -u$

(4) $x(0) = 1$

(5) $x(1) = 1$

Από την (1) προκύπτει ότι $u = \frac{\lambda}{2}$. Άρα $\dot{x} = -\frac{\lambda}{2}$ and $\dot{\lambda} = 0$.

Λύνοντας αυτές τις δύο διαφορικές εξισώσεις έχουμε: $x(t) = c_1 - \frac{\lambda t}{2}$ και $\lambda = c_2$.

Από την $x(0) = 1$ παίρνουμε ότι $1 = c_1 - \frac{\lambda \cdot 0}{2} \Rightarrow c_1 = 1$.

Από τον περιορισμό $x(1) = 1$ έχουμε

$$x(1) = c_1 - \frac{\lambda t}{2} = 1 - \frac{\lambda t}{2} = 1 - \frac{\lambda \cdot 1}{2} = 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

Άρα

$$x^* = c_1 - \frac{\lambda t}{2} = 1 - \frac{2t}{2} = 1 - t$$

$$u^* = \frac{\lambda}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Άριστος έλεγχος με προεξόφληση

Συχνά στα οικονομικά η $V(x,u)$ περιλαμβάνει μια ροή εισοδήματος ή χρησιμότητας που πρέπει να προεξοφληθεί (δηλ., να την φέρουμε στην παρούσα αξία) είτε μέσω επιτοκίου, είτε μέσω ενός υποκειμενικού συντελεστή χρονικής προτίμησης. Ο συντελεστής προεξόφλησης είναι $e^{-\delta t}$

Η προεξόφληση μεταβάλλει την αντικειμενική συνάρτηση και το πρόβλημα του ελέγχου που τώρα γίνεται:

$$\max_{[u(t)]} J = \int_0^T e^{-\delta t} V(x,u)\,dt$$

Με τυπικές συνθήκες

$\dot{x} = f(x,u),\ x(0) = x^0,\ x(T) = x^T$

Η Hamiltonian γίνεται

$$H(x,u) = e^{-\delta t} V(x,u) + \lambda f(x,u)$$

Ορίστε τώρα την **Hamiltonian τρέχουσας αξίας** (current value Hamiltonian function**)** H_c**.** Αυτή είναι η

$$H(x,u) = V(x,u) + \mu f(x,u)$$

Άρα

$$H_c = He^{\delta t} \quad ή \quad H = H_c e^{-\delta t}$$
$$\mu = \lambda e^{\delta t} \quad ή \quad \lambda = \mu e^{-\delta t}$$

Ας δούμε τώρα πως μεταβάλλονται οι συνθήκες μας. Εφόσον το $e^{\delta t}$ είναι σταθερό για μια μεταβολή στην μεταβλητή ελέγχου η συνθήκη (1) γίνεται $\partial H_c / \partial u = 0$. Η συνθήκη (2) είναι $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} e^{-\delta t}$. Εφόσον $\lambda = \mu e^{-\delta t} \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\mu} e^{-\delta t} - \delta \mu e^{-\delta t}$. (Θυμηθείτε ότι $\dot{\lambda}$ σημαίνει πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο). Εξισώνοντας έχουμε $\dot{\mu} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \delta \mu$, που είναι τώρα η συνθήκη (2). Η συνθήκη (3) είναι πάλι $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial H_c}{\partial \lambda} e^{-\delta t} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = f(x,u)$.
Οι δύο τελευταίες συνθήκες είναι (4) $x(0) = x^0$ και (5) $\lambda(T) = \mu(T) e^{-\delta t} = 0$ (ή $x(T) = x^T$, αν το x^T είναι άγνωστο).

Ανακεφαλαιώνοντας, ορίστε την **Hamiltonian τρέχουσας αξίας** και την **μεταβλητή συνορισμού τρέχουσας αξίας)**, μ

$$H_c(x,u) = H(x,u) e^{\delta t} = V(x,u) + \mu f(x,u), \text{ όπου } \lambda = \mu e^{-\delta t}$$

Οι συνθήκες αριστοποίησης είναι:

(1) $\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0 \qquad 0 \le t \le T$

(2) $\dot{\mu} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \delta \mu \qquad 0 \le t \le T$

(3) $\dot{x} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = f(x,u)$

(4) $x(0) = x^0$

(5) $\mu(T) e^{-\delta t} = 0$ (ή $x(T) = x^T$, αν το x^T είναι άγνωστο).

Οι συνθήκες αριστοποίησης μας επιτρέπουν να απαλείψουμε την μεταβλητή ελέγχου *u* από την συνθήκη (1) και να πάρουμε δύο διαφορικές εξισώσεις, μία για την μεταβλητή ορισμού, *x*, και μία για την μεταβλητή συνορισμού τρέχουσας αξίας, *μ*.

Ας εφαρμόσουμε τώρα αυτή τη θεωρία στο υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Ramsey.

Υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Ramsey.

[*Σημ*: Το υπόδειγμα αυτό διαφέρει από την εκδοχή των σημειώσεων. Θεωρεί ότι υπάρχει απόσβεση αλλά όχι τεχνική πρόοδος. Δεν θεωρούμε επίσης ότι υπάρχουν νοικοκυριά και επιχειρήσεις και μεγιστοποιούμε για όλη την οικονομία. Οι εντατικές μεταβλητές είναι βεβαίως κατά κεφαλή και όχι ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας.]

Μεταβλητές: $Y(t)$, προϊόν, $C(t)$ κατανάλωση, $I(t)$ επένδυση, $K(t)$ κεφάλαιο, $L(t)$ εργασία. Με μικρά γράμματα συμβολίζουμε τα αντίστοιχα κατά κεφαλήν μεγέθη , δηλ., διαιρεμένα δια L.

Παράμετροι: δ, συντελεστής απόσβεσης, n, ρυθμός μεγέθυνσης πληθυσμού (εργασίας) $\left(\dot{L}/L = n\right)$, β, συντελεστής προεξόφλησης για τη χρησιμότητα.

Εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} Y(t) &= C(t) + I(t) \\ I(t) &= \dot{K}(t) + \delta K(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(t) = c(t) + \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta k(t)$$

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\cdot\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - kn \Rightarrow \frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + kn .$$

Άρα

$$y(t) = c(t) + \dot{k}(t) + (n+\delta)k(t) .$$

Κάνουμε τις συνηθισμένες υποθέσεις του Solow για την συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή $y = f(k)$, και γράφουμε την εξίσωση της μεγέθυνσης του κεφαλαίου κατά κεφαλή ως: $\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c$

Άρα το κατά κεφαλή προϊόν μείον την επένδυση αναπλήρωσης (breakeven investment) μείον την κατά κεφαλή κατανάλωση μας δίνει τη μεταβολή στο κατά κεφαλή κεφάλαιο.

Ορίστε την $U(c(t))$ ως την **στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας** *instantaneous utility function* (ή συνάρτηση ευδαιμονίας *felicity function*). Το πρόβλημα ελέγχου είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$\max_c J = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} U(c) dt$$

Ενώ η εξίσωση Solow μας δίνει την εξίσωση κίνησης.

$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c$$

Το αρχικό κατά κεφαλή κεφάλαιο στον αρχικό χρόνο t=0 είναι k_0 και η κατά κεφαλή κατανάλωση είναι θετική και μικρότερη από το κατά κεφαλή προϊόν.

$$k(0) = k_0$$
$$0 \le c \le f(k)$$

Παρατηρείστε ότι το κεφάλαιο κατά κεφαλή, k, είναι η μεταβλητή ορισμού και η κατά κεφαλή κατανάλωση, c, η μεταβλητή ελέγχου.

Η *Hamiltonian τρέχουσας αξίας* είναι

$$H_c = U(c) + \mu[f(k) - (n+\delta)k - c]$$

Με συνθήκες πρώτης τάξεως

$$\frac{\partial H_c}{\partial c} = U'(c) - \mu = 0 \Rightarrow U'(c) = \mu$$
$$\dot{\mu} = -\mu f'(k) + \mu(n+\delta) + \beta\mu$$
$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c$$

Παραγωγίστε την πρώτη συνθήκη ως προς τον χρόνο.

$$\frac{dU'(c)}{dt} = \dot{\mu} \Rightarrow U''(c)\dot{c} = \dot{\mu} = -\mu f'(k) + \mu(n+\delta) + \beta\mu \Rightarrow$$
$$\frac{U''(c)\dot{c}}{\mu} = \frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c} = -f'(k) + (n+\delta+\beta) \quad \text{εφόσον } \mu = U'(c)$$

Θυμηθείτε τον ορισμό του μέτρου σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο των Pratt-Arrow (Pratt-Arrow measure of relative risk aversion):

$$\sigma(c) = -\frac{cU''(c)}{U'(c)}$$

Άρα $\dfrac{\sigma(c)}{c}\dot{c} = f'(k) - (n+\delta+\beta)$ or $\dot{c} = \dfrac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (n+\delta+\beta)\right]c$

[*Σημ*: Θυμηθείτε ότι στην συνάρτηση χρησιμότητας σταθερής σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο (constant risk aversion) (ή σταθερής ελαστικότητας διαχρονικής υποκατάστασης, constant intertemporal elasticity of substitution) το μέτρο των Pratt-Arrow είναι σταθερό, δηλ., $\sigma(c)=\theta, \forall c$. Μια τέτοια συνάρτηση έχει την μορφή $c^{1-\theta}/1-\theta$. O David Romer στο *Advanced Macroeconomics* χρησιμοποιεί μια τέτοια συνάρτηση και η εξίσωση Euler χαρακτηρίζεται από αυτή την παράμετρο. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι για θ=1 ισχύει ότι $U(c)=\ln c$].

Έχουμε τώρα δυο διαφορικές εξισώσεις.

$$\dot{c}=\frac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k)-(n+\delta+\beta)\right]c$$

$$\dot{k}=f(k)-(n+\delta)k-c$$

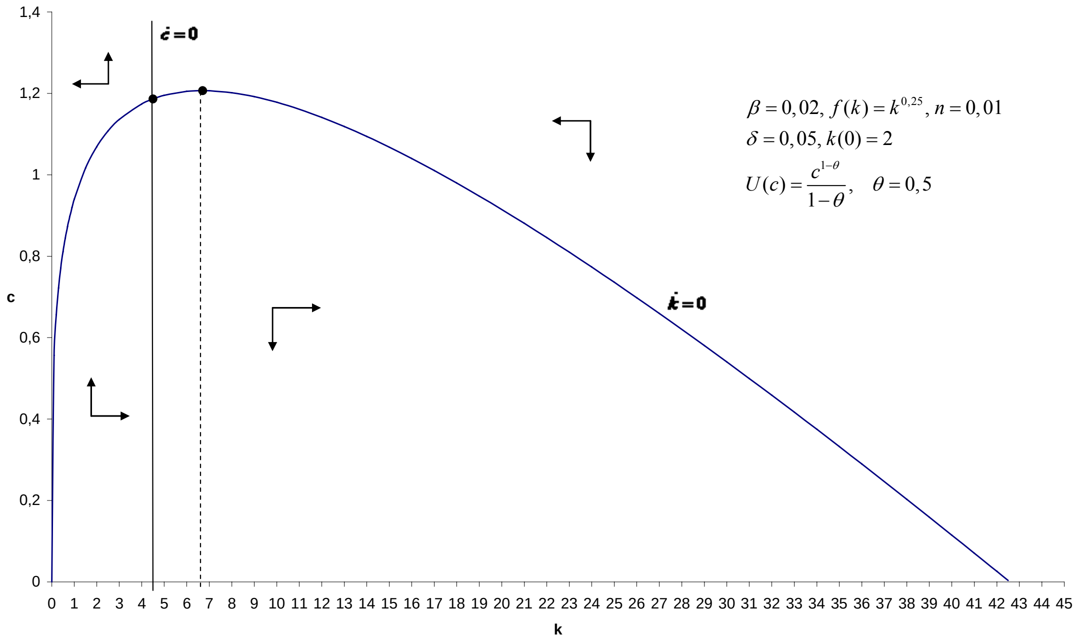
Αν $\dot{c}=0$ τότε $f'(k^*)=n+\delta+\beta.$ Από την άλλη, αν $\dot{k}=0$, τότε $c^*=f(k^*)-(n+\delta)k^*.$

Επιπλέον αν $\dot{c}>0$ τότε $f'(k^*)>n+\delta+\beta$ οπότε $k<k^*$. Έτσι αριστερά του $\dot{c}=0$ η ισοκλινής του k αυξάνει. Δεξιά από το $\dot{c}=0$ η ισοκλινής του k φθίνει. Αντίστοιχα κάτω από το $\dot{k}=0$ η ισοκλινής του c αυξάνει. Πάνω από το $\dot{k}=0$ η ισοκλινής του c φθίνει. Το διάνυσμα των δυνάμεων δείχνει ότι το σημείο (c^*,k^*) αποτελεί λύση σημείου σάγματος (saddle point solution). Η μοναδική βέλτιστη τροχιά είναι πάνω στον σταθερό βραχίονα.. Για κάθε k_0 το μοναδικό βιώσιμο (δηλ., αυτό που δεν αποκλείεται από τις παραδοχές του υποδείγματος) επίπεδο κατανάλωσης είναι αυτό που παρίσταται με το αντίστοιχο σημείο στον σταθερό βραχίονα. Σε ισορροπία το k είναι σταθερό, άρα το κεφάλαιο K αυξάνει με τον ρυθμό μεγέθυνσης του, L, δηλ., n. (Θυμηθείτε ότι στην εκδοχή του Shone δεν υπάρχει τεχνική πρόοδος). Εφόσον το k είναι σταθερό το ίδιο συμβαίνει και στο y άρα και το Y μεγεθύνεται όπως το εργατικό δυναμικό. Έχουμε λοιπόν μια ισορροπία ισόρροπης μεγέθυνσης (balanced-growth equilibrium).

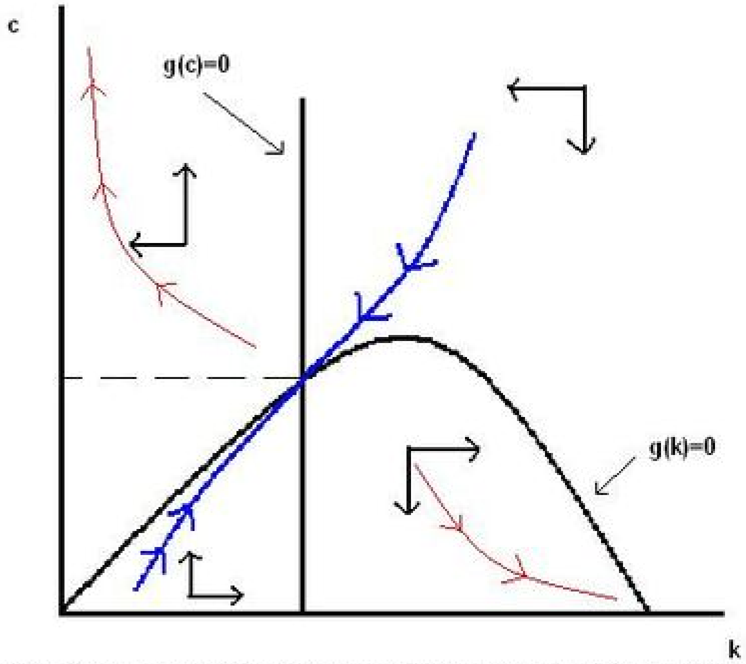
Το παρακάτω διάγραμμα έγινε στο Excel με τις ακόλουθες παραμέτρους και εξισώσεις.

$$\beta = 0,02 \quad f(k) = k^{0,25} \quad n = 0,01 \quad \delta = 0,05 \quad k(0) = 2$$

$$U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \theta = 0,5 \Rightarrow U(c) = 2\sqrt{c}$$



Άλλο ένα διάγραμμα από το (ημιτελές) άρθρο της Wikipedia για το υπόδειγμα Ramsey όπου φαίνεται το saddle path.



The blue line represent the dynamic adjustment path of the economy. It is a stable path of the dynami system.
The red lines represent dynamic paths which are ruled out by the Transversality Condition