ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 03

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θέμα 1, Ιούνιος 2017

α) OLS εκτιμητής του β:

$$\widehat{\beta} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Εκτιμώμενη γραμμή/εξίσωση παλινδρόμησης:

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 M_i + \widehat{\beta}_2 S_i = 5 + 8M_i + 4S_i$$

Συντελεστής προσδιορισμού:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{0,28}{0,5} = 0,56$$

Ερμηνεία συντελεστή προσδιορισμού:

Το 56% της συνολικής μεταβλητότητας του ωρομισθίου ερμηνεύεται από τη γραμμική επίδραση του φύλου και της εκπαίδευσης.

β) OLS εκτιμητής του $V(\widehat{\beta})$:

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1} = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0,01 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 \end{pmatrix}$$

όπου

$$s^2 = \frac{1}{T-K-1} SSE = \frac{1}{25-2-1} 0,22 = 0,01$$

$$SST = SSR + SSE \Rightarrow SSE = SST - SSR = 0,5 - 0,28 = 0,22$$

γ) 95% διάστημα πρόβλεψης για το μέσο ωρομίσθιο $(E(Y_f))$ γυναίκας $(M_f = 0)$ με 10 έτη εκπαίδευσης $(S_f = 10)$:

$$\Delta\Pi_{E(Y_f)}(95\%) = \left[\widehat{E(Y_f)} \pm t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}}\, s_{\widehat{E(Y_f)}}\right] = [45 \pm 2,074 \cdot 2] = [40,85\ ,\ 49,15]$$

όπου

$$\widehat{E(Y_f)} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 M_f + \widehat{\beta}_2 S_f = 5 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 45$$

$$t_{T-K-1,\,\frac{0,05}{2}} = t_{25-2-1,\,0,025} = t_{22,\,0,025} = 2,074$$

$$s_{\widehat{E(Y_f)}} = \sqrt{X_f' \widehat{V}(\widehat{\beta}) X_f} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}} = \sqrt{4,01} \approx 2$$

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 \\ M_f \\ S_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ε) Αλλαγές στις μονάδες μέτρησης:

$Y^* = \lambda_Y Y$ με $\lambda_Y = 1,1$, $M^* = \lambda_1 M$ με $\lambda_1 = 1$ και $S^* = \lambda_2 S$ με $\lambda_2 = 1$.

Υπόδειγμα παλινδρόμησης με τις αλλαγές στις μονάδες μέτρησης:

$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* M_i^* + \beta_2^* S_i^* + u_i^*$

Στο ερώτημα α):

Για τους OLS εκτιμητές των β_0^*, β_1^* και β_2^* ισχύει ότι

$$\widehat{\beta}_0^* = \lambda_Y \widehat{\beta}_0 = 1,1 \cdot 5 = 5,5, \quad \widehat{\beta}_1^* = \frac{\lambda_Y}{\lambda_1}\widehat{\beta}_1 = \frac{1,1}{1}8 = 8,8 \quad \text{και} \quad \widehat{\beta}_2^* = \frac{\lambda_Y}{\lambda_2}\widehat{\beta}_2 = \frac{1,1}{1}4 = 4,4$$

Εκτιμώμενη γραμμή/εξίσωση παλινδρόμησης:

$$\widehat{Y}_i^* = \widehat{\beta}_0^* + \widehat{\beta}_1^* M_i^* + \widehat{\beta}_2^* S_i^* = 5,5 + 8,8M_i^* + 4,4S_i^*$$

Ο συντελεστής προσδιορισμού δεν μεταβάλλεται. Άρα, η ερμηνεία του συντελεστή προσδιορισμού είναι ίδια. Το 56% της συνολικής μεταβλητότητας του ωρομισθίου ερμηνεύεται από τη γραμμική επίδραση του φύλου και της εκπαίδευσης.

Στο ερώτημα γ):

Για το 95% διάστημα πρόβλεψης για την $E(Y_f^*)$ ισχύει ότι

$$\Delta\Pi_{E(Y_f^*)}(95\%) = \lambda_Y \Delta\Pi_{E(Y_f)}(95\%) = 1,1 \cdot [40,85\,,\ 49,15] = [44,94\,,\ 54,06]$$

Θέμα 1, Ιούνιος 2011

α) Μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση παραγωγής

$$Y_t = \beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \ln\left(\beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \ln\left(K_t^{\beta_1}\right) + \ln\left(L_t^{\beta_2}\right) + \ln(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + \ln(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \beta_0^* + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + u_t \ (1)$$

όπου $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ και $u_t = \ln(\varepsilon_t)$.

Το θεωρητικό υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) αντιστοιχεί στο εκτιμώμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1).

Ερμηνεία εκτιμώμενων συντελεστών κλίσεων:

$\widehat{\beta}_1$=0,7 : Η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς το κεφάλαιο είναι 0,7.

$\widehat{\beta}_2$=0,25 : Η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς την εργασία είναι 0,25.

Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το β_1 είναι

$$\Delta\mathrm{E}_{\beta_1}(95\%) = \left[\widehat{\beta}_1 \pm t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}} s_{\widehat{\beta}_1}\right] = [0,7 \pm 2,086 \cdot 0,05] = [0,6\,,\ 0,8]$$

όπου

$$t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}} = t_{23-2-1,\,0{,}025} = t_{20,\,0{,}025} = 2,086$$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1^*}{s_{\widehat{\beta}_1}} = \frac{0{,}7-0}{0{,}05} = 14$

Κρίσιμη περιοχή: $|t| > t_{T-K-1,\frac{\alpha}{2}} = t_{23-2-1,\,0{,}025} = t_{20,\,0{,}025} = 2,086$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Ο συντελεστής β_1 είναι σημαντικός.

β) Στατιστικός έλεγχος για σημαντικότητα υποδείγματος

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 0$ ή/και $\beta_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{(SST-SSE)/K}{SSE/(T-K-1)} = \frac{(0{,}5-0{,}1)/2}{0{,}1/(23-2-1)} = 40$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{K,T-K-1,\alpha} = F_{2,20,0{,}05} = 3,49$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Το υπόδειγμα είναι σημαντικό.

γ) Ορίζουμε τη ψευδομεταβλητή D:

$$D_t = \begin{cases} 1, & \text{αν παρατήρηση } t \in 2000-2010 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς την εργασία διαφέρει τις περιόδους 1988-1999 και 2000-2010. Άρα, εισάγουμε στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) την πολλαπλασιαστική ψευδομεταβλητή $\ln(L)\cdot D$. Έχουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$(*) \;\; \ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \delta_2 \ln(L_t) \cdot D_t + \eta_t$$

Την περίοδο 2000-2010 ($D_t = 1$):

$$(*) \Rightarrow \ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \delta_2 \ln(L_t) \cdot 1 + \eta_t \Rightarrow$$
$$\ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + (\alpha_2 + \delta_2) \ln(L_t) + \eta_t$$

Την περίοδο 1988-1999 ($D_t = 0$):

$$(*) \Rightarrow \ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \delta_2 \ln(L_t) \cdot 0 + \eta_t \Rightarrow$$
$$\ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \eta_t$$

Η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς την εργασία διαφέρει τις περιόδους 1988-1999 και 2000-2010 $\Leftrightarrow$

$\alpha_2 \neq \alpha_2 + \delta_2 \Leftrightarrow$

$\delta_2 \neq 0$

Βάσει του υποδείγματος $(*)$ ελέγχουμε την υπόθεση ότι $\delta_2 \neq 0$.

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \delta_2 = 0$ έναντι $H_1 : \delta_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\delta}_2 - \delta_2^*}{s_{\widehat{\delta}_2}} = \frac{\widehat{\delta}_2}{s_{\widehat{\delta}_2}}$

Κρίσιμη περιοχή: $|t| > t_{T-K-1,\,\frac{\alpha}{2}} = t_{23-3-1,\,0{,}025} = t_{19,\,0{,}025} = 2,093$

- Αν απορρίπταμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.
  Σχόλιο: Η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς την εργασία διαφέρει τις περιόδους 1988-1999 και 2000-2010.

- Αν δεν απορρίπταμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.
  Σχόλιο: Η ελαστικότητα της παραγωγής ως προς την εργασία δεν διαφέρει τις περιόδους 1988-1999 και 2000-2010.

Παράρτημα

Έστω 2×2 πίνακας με μη-μηδενική ορίζουσα, $det \neq 0$. Ο αντίστροφος του πίνακα είναι

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad det = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Έστω $n \times n$ διαγώνιος πίνακας με μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία, $\delta_j \neq 0$, $j = 1, ..., n$. Ο αντίστροφος του πίνακα είναι

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\delta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\delta_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1/\delta_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/\delta_n \end{pmatrix}$$