# ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

## **Ασκήσεις: 02**

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

# Θέμα 1, Σεπτέμβριος 2011

**γ)** Επίδραση του εισοδήματος στην αποταμίευση είναι θετική $\Leftrightarrow \beta_1 > 0$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 > 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1^*}{s_{\widehat{\beta}_1}} = \frac{0{,}7-0}{0{,}192} = 3,646$

όπου $s_{\widehat{\beta}_1} = \sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1)} = \sqrt{0,037} = 0,192$

Κρίσιμη περιοχή: $t > t_{T-K-1,\,\alpha} = t_{5-1-1,\,0{,}05} = t_{3,\,0{,}05} = 2,353$

Απόφαση: Απορρίπτουμε $H_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Η επίδραση του εισοδήματος στην αποταμίευση είναι θετική.

δ) 95% διάστημα πρόβλεψης για την αποταμίευση ($S_f$) ατόμου με εισόδημα 500 € = 0,5 χιλ. € ($I_f = 0,5$):

$$\Delta\Pi_{S_f}(95\%) = \left[\widehat{S}_f \pm t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}}\, s_{\widehat{S}_f}\right] = [0,25 \pm 3,182 \cdot 0,824] = [-2,37\,,\ 2,87]$$

όπου

$$\widehat{S}_f = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 I_f = -0,1 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$t_{T-K-1,\frac{0,05}{2}} = t_{5-1-1,\,0,025} = t_{3,\,0,025} = 3,182$$

$$s_{\widehat{S}_f} = \sqrt{s^2 + X_f' \widehat{V}(\widehat{\beta}) X_f} = \sqrt{0,37 + \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,407 & -0,111 \\ -0,111 & 0,037 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{0,68} = 0,824$$

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 \\ I_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

**ε)** Αλλαγές στις μονάδες μέτρησης: $S^* = \lambda_S S$ με $\lambda_S = 0,1$ και $I^* = \lambda_1 I$ με $\lambda_1 = 1$.

Υπόδειγμα παλινδρόμησης με τις αλλαγές στις μονάδες μέτρησης: $S_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* I_i^* + u_i^*$

Στο ερώτημα α):

Για τους OLS εκτιμητές των $\beta_0^*$ και $\beta_1^*$ ισχύει ότι

$$\widehat{\beta}_0^* = \lambda_S \widehat{\beta}_0 = 0,1 \cdot (-0,1) = -0,01 \quad \text{και} \quad \widehat{\beta}_1^* = \frac{\lambda_S}{\lambda_1}\widehat{\beta}_1 = \frac{0,1}{1}0,7 = 0,07$$

Εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης:

$$\widehat{S}_i^* = \widehat{\beta}_0^* + \widehat{\beta}_1^* I_i^* = -0,01 + 0,07 I_i^*$$

Στο ερώτημα γ):

Επίδραση του εισοδήματος στην αποταμίευση είναι θετική $\Leftrightarrow \beta_1^* > 0$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1^* = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1^* > 0$

Η στατιστική ελέγχου δεν μεταβάλλεται. Άρα, η απόφαση του στατιστικού ελέγχου είναι ίδια. Η επίδραση του εισοδήματος στην αποταμίευση είναι θετική.

Έξτρα: Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το $\beta_0$ είναι

$$\Delta\mathrm{E}_{\beta_0}(95\%) = \left[\widehat{\beta}_0 \pm t_{T-K-1,\frac{0{,}05}{2}} s_{\widehat{\beta}_0}\right] = [-0,1 \pm 3,182 \cdot 0,638] = [-2,13\,,\,1,93]$$

Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το $\beta_1$ είναι

$$\Delta\mathrm{E}_{\beta_1}(95\%) = \left[\widehat{\beta}_1 \pm t_{T-K-1,\frac{0{,}05}{2}} s_{\widehat{\beta}_1}\right] = [0,7 \pm 3,182 \cdot 0,192] = [0,09\,,\,1,31]$$

Στατιστικός έλεγχος για σημαντικότητα υποδείγματος

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(T-K-1)} = \frac{0{,}817/1}{(1-0{,}817)/(5-1-1)} = 13,4$

$$\text{ή} \quad F = \frac{(SST-SSE)/K}{SSE/(T-K-1)} = \frac{(6-1{,}1)/1}{1{,}1/(5-1-1)} = 13,4$$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{K,T-K-1,\alpha} = F_{1,3,0{,}05} = 10,128$

Απόφαση: Απορρίπτουμε $H_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Το υπόδειγμα είναι σημαντικό.

Στατιστικός έλεγχος για έναν γραμμικό περιορισμό

Υποθέσεις: $H_0 : 2\beta_0 - \beta_1 = -8 \;\;$ έναντι $\;\; H_1 : 2\beta_0 - \beta_1 \neq -8$

$$\Leftrightarrow H_0 : R\beta = c \;\; \text{έναντι} \;\; H_1 : R\beta \neq c$$

όπου

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad c = -8$$

Στατιστική ελέγχου: $F = (R\widehat{\beta} - c)'\big(R\widehat{V}(\widehat{\beta})R'\big)^{-1}(R\widehat{\beta} - c)\big/q$

$$= (7,1)' \cdot (2,1)^{-1} \cdot (7,1)/1 = 7,1 \cdot (2,1)^{-1} \cdot 7,1/1 = 24$$

όπου

$$R\widehat{\beta} - c = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,7 \end{pmatrix} - (-8) = 7,1$$

$$R\widehat{V}(\widehat{\beta})R' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,407 & -0,111 \\ -0,111 & 0,037 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2,1$$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{q,\, T-K-1,\, \alpha} = F_{1,\, 5-1-1,\, 0{,}05} = F_{1,\, 3,\, 0{,}05} = 10,128$

Απόφαση: Απορρίπτουμε $H_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Ο γραμμικός περιορισμός $2\beta_0 - \beta_1 = -8$ δεν ισχύει.

Έξτρα: Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$, $t = 1, ..., T$, οι OLS εκτιμητές των $\beta_0$ και $\beta_1$ είναι $\widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$ και $\widehat{\beta}_1 = \frac{s_Y}{s_X} r_{X,Y}$, όπου $\overline{X}$ και $\overline{Y}$ είναι ο δειγματικός μέσος, $s_X$ και $s_Y$ είναι η δειγματική τυπική απόκλιση και $r_{X,Y}$ είναι ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης των $X$ και $Y$.

Διάνυσμα $Y$ εξαρτημένης μεταβλητής και πίνακας $X$ ερμηνευτικών μεταβλητών $X_1 = X$:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_T \end{pmatrix}$$

Άρα

$$X^{'}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

όπου $\sum = \sum_{t=1}^{T}$

$$(X^{'}X)^{-1} = \frac{1}{det}\begin{pmatrix} \sum X_t^2 & -\sum X_t \\ -\sum X_t & T \end{pmatrix} \quad det = T\sum X_t^2 - \left(\sum X_t\right)^2$$

και

$$X^{'}Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{pmatrix}$$

OLS εκτιμητής του $\beta$:

$$\widehat{\beta} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y = \frac{1}{det}\begin{pmatrix} \sum X_t^2 & -\sum X_t \\ -\sum X_t & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{det}\begin{pmatrix} \sum X_t^2 \sum Y_t - \sum X_t \sum X_t Y_t \\ -\sum X_t \sum Y_t + T\sum X_t Y_t \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{1}{det}\Big( -\sum X_t \sum Y_t + T\sum X_t Y_t\Big) = \frac{T\sum X_t Y_t - \sum X_t \sum Y_t}{T\sum X_t^2 - \big(\sum X_t\big)^2} = \ldots =$$

$$= \frac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \ldots = \frac{s_Y}{s_X} r_{X,Y}$$

και

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{1}{det}\Big( \sum X_t^2 \sum Y_t - \sum X_t \sum X_t Y_t\Big) = \frac{\sum X_t^2 \sum Y_t - \sum X_t \sum X_t Y_t}{T\sum X_t^2 - \big(\sum X_t\big)^2} =$$

$$= \ldots = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X}$$

Έξτρα: Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης $Y_t = \beta_0 + u_t$, $t = 1, ..., T$, ο OLS εκτιμητής του $\beta_0$ είναι $\widehat{\beta_0} = \overline{Y}$, όπου $\overline{Y}$ είναι ο δειγματικός μέσος του $Y$.

Διάνυσμα $Y$ εξαρτημένης μεταβλητής και πίνακας $X$ ερμηνευτικών μεταβλητών $X_1 = \emptyset$:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$X^{'}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = T \Rightarrow$$

$$(X^{'}X)^{-1} = \frac{1}{T}$$

και

$$X^{'}Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^{T} Y_t$$

OLS εκτιμητής του $\beta = \beta_0$:

$$\widehat{\beta}_0 = (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t = \overline{Y}$$

Σημείωση:

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης $Y = \beta_0 + u$, ο σταθερός όρος $\beta_0$ είναι η μέση τιμή της $Y$, $E(Y) = \beta_0$. Βρέθηκε ότι ο OLS εκτιμητής της μέσης τιμής της $Y$, $E(Y)$, είναι ο δειγματικός μέσος της, $\overline{Y}$.