

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 11

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών



Θέμα 2, Σεπτέμβριος 2018

α) Συντελεστής προσδιορισμού:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Ερμηνεία συντελεστή προσδιορισμού:

Το 25% της συνολικής μεταβλητότητας της παραγωγής ερμηνεύεται από τη γραμμική επίδραση του κεφαλαίου και της εργασίας.

Στατιστικός έλεγχος για σημαντικότητα υποδείγματος

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 0$ ή/και $\beta_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{R^2/K}{(1-R^2)/(T-K-1)} = \frac{0,25/2}{(1-0,25)/(24-2-1)} = 3,5$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{K, T-K-1, \alpha} = F_{2, 21, 0,05} = 3,467$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Το υπόδειγμα είναι σημαντικό.

β) Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (2) γίνεται στατιστικός έλεγχος για ετεροσκεδαστικότητα.

Στατιστικός έλεγχος White για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = f(K_t, L_t)$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 K_t + \gamma_1 K_t^2 + \alpha_2 L_t + \gamma_2 L_t^2 + \delta_1 K_t L_t + \varepsilon_t$ (2)

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = 0$ έναντι $H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $W = TR^2 = 24 \cdot 0,05 = 1,2$

Κρίσιμη περιοχή: $W > \chi_{m, \alpha}^2 = \chi_{5, 0,05}^2 = 11,07$

όπου

$$m = \frac{(K+1)(K+2)}{2} - 1 = \frac{(2+1)(2+2)}{2} - 1 = 5$$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα της μορφής $\sigma_t^2 = f(K_t, L_t)$.

Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (3) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση έως 3^{ης}-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 K_t + \gamma_2 L_t + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \rho_3 \hat{u}_{t-3} + \varepsilon_t$ (3)

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ έναντι $H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } \rho_j \neq 0, j = 1, 2, 3$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T - p)R^2 = (24 - 3) \cdot 0,5 = 10,5$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi_{p, \alpha}^2 = \chi_{3, 0,05}^2 = 7,815$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως 3^{ης}-τάξης.

Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα και υπάρχει αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές.

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\hat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής, αλλά δεν είναι άριστος. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\hat{V}(\hat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\hat{\beta})$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτός του ερωτήματος α)) είναι αναξιόπιστοι.

γ) Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$(4) \ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \eta_t$$

Στατιστικός έλεγχος Durbin-Watson για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $\eta_t = \rho\eta_{t-1} + \varepsilon_t$



Υποθέσεις: $H_0 : \rho = 0$ έναντι $H_1 : \rho > 0$ ή $\rho < 0$

Στατιστική ελέγχου: $DW = 2,2$

Κρίσιμη περιοχή: $DW < d_{L,\alpha} = d_{L,0,05} = 1,188$ ή

$$DW > 4 - d_{L,\alpha} = 4 - d_{L,0,05} = 4 - 1,188 = 2,812$$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση 1ης-τάξης.

Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (4). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές.

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\hat{\alpha}$ των συντελεστών α είναι αμερόληπτος, συνεπής και άριστος εκτιμητής. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\hat{V}(\hat{\alpha})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\hat{\alpha})$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής.

Το υπόδειγμα παλινδρόμησης (4) είναι το μετασχηματισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης σταθερών ελαστικοτήτων για την παραγωγή:

$$(4) \ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \eta_t \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln(Y_t)} = e^{\alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + \alpha_2 \ln(L_t) + \eta_t} \Leftrightarrow$$

$$Y_t = e^{\alpha_0} e^{\alpha_1 \ln(K_t)} e^{\alpha_2 \ln(L_t)} e^{\eta_t} \Leftrightarrow$$

$$Y_t = e^{\alpha_0} e^{\ln(K_t^{\alpha_1})} e^{\ln(L_t^{\alpha_2})} e^{\eta_t} \Leftrightarrow$$

$$Y_t = \alpha_0^* K_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2} \omega_t$$

όπου $\alpha_0^* = e^{\alpha_0}$ και $\omega_t = e^{\eta_t}$.

Το υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) για τη μεταβλητή Y είναι γραμμικό ως προς τις μεταβλητές K, L και υπάρχει αυτοσυσχέτιση. Το υπόδειγμα παλινδρόμησης (4) για τη μεταβλητή Y είναι μη γραμμικό ως προς τις μεταβλητές K, L και δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση. Η αυτοσυσχέτιση που υπάρχει στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) μπορεί να έχει δημιουργηθεί λόγω της χρήσης λάθους συναρτησιακής σχέσης.

Τότε, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης (χρήση λάθους συναρτησιακής σχέσης) που δημιουργεί ενδογένεια. Άρα, ο OLS εκτιμητής $\hat{\beta}$ των συντελεστών β είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής.



Θέμα 2, Φεβρουάριος 2020

α) Ερμηνεία εκτιμώμενων συντελεστών κλίσης της παλινδρόμησης:

$\hat{\beta}_1 = -0,9$: Αν η τιμή του καφέ αυξηθεί κατά 1€/κιλό, ενώ η τιμή της ζάχαρης και το εισόδημα παραμείνουν σταθερά, τότε η (μέση) ζήτηση για καφέ θα μειωθεί κατά 0,9 τόνους.

$\hat{\beta}_2 = -0,2$: Αν η τιμή του ζάχαρης αυξηθεί κατά 1€/κιλό, ενώ η τιμή του καφέ και το εισόδημα παραμείνουν σταθερά, τότε η (μέση) ζήτηση για καφέ θα μειωθεί κατά 0,2 τόνους.

$\hat{\beta}_3 = 5,2$: Αν το εισόδημα αυξηθεί κατά 1 εκατομ. €, ενώ η τιμή του καφέ και της ζάχαρης παραμείνουν σταθερά, τότε η (μέση) ζήτηση για καφέ θα αυξηθεί κατά 5,2 τόνους.

Συντελεστής προσδιορισμού:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{60}{100} = 0,4$$

Ερμηνεία συντελεστή προσδιορισμού:

Το 40% της συνολικής μεταβλητότητας της ζήτησης για καφέ ερμηνεύεται από τη γραμμική επίδραση της τιμής του καφέ, της τιμής της ζάχαρης και του εισοδήματος.

β) Επίδραση της τιμής του καφέ στη ζήτηση για καφέ είναι διπλάσια αυτής της τιμής της ζάχαρης $\Leftrightarrow \beta_1 = 2\beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 - 2\beta_2 = 0$

Στατιστικός έλεγχος για έναν γραμμικό περιορισμό

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 - 2\beta_2 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 - 2\beta_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\delta' \hat{\beta} - \pi}{s_{\delta' \hat{\beta}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2 - 0}{s_{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}} = \frac{-0,9 - 2 \cdot (-0,2) - 0}{0,2} = -2,5$

όπου

$$\begin{aligned} s_{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2} &= \sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2)} = \sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_1) + (-2)^2 \cdot \widehat{V}(\hat{\beta}_2) + 2 \cdot (-2) \cdot \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)} \\ &= \sqrt{s_{\hat{\beta}_1}^2 + 4 \cdot s_{\hat{\beta}_2}^2 - 4 \cdot \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)} = \sqrt{0,2^2 + 4 \cdot 0,1^2 - 4 \cdot 0,01} \\ &= \sqrt{0,04} = 0,2 \end{aligned}$$

Κρίσιμη περιοχή: $|t| > t_{T-K-1, \frac{\alpha}{2}} = t_{20-3-1, \frac{0,05}{2}} = t_{16, 0,025} = 2,12$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Η επίδραση της τιμής του καφέ στη ζήτηση για καφέ δεν είναι διπλάσια αυτής της τιμής της ζάχαρης.

γ) Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (2) γίνεται στατιστικός έλεγχος για ετεροσκεδαστικότητα.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Pagan-Godfrey για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 E_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 E_t + \varepsilon_t \quad (2)$

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ έναντι $H_1 : \alpha_1 \neq 0$ ή/και $\alpha_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $BPG = TR^2 = 20 \cdot 0,01 = 0,2$

Κρίσιμη περιοχή: $BPG > \chi_{m, \alpha}^2 = \chi_{2, 0,05}^2 = 5,991$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα της μορφής $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 E_t$.

Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (3) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση έως 3ης-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 P_t + \gamma_2 Z_t + \gamma_3 E_t + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \rho_3 \hat{u}_{t-3} + \varepsilon_t$
(3)

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ έναντι $H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } \rho_j \neq 0, j = 1, 2, 3$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T - p)R^2 = (20 - 3) \cdot 0,05 = 0,85$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi_{p, \alpha}^2 = \chi_{3, 0,05}^2 = 7,815$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως 3ης-τάξης.

Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα και αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές.

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\hat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος, συνεπής και άριστος εκτιμητής. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\hat{V}(\hat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\hat{\beta})$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτός του ερωτήματος β) είναι αξιόπιστοι.

δ) Ισχύει ότι: $P_t = 2,2 + 0,8P_{t-1} + 0,3Z_t - 0,6u_t$ (4)

με $Cov(P_{t-1}, u_t) = Cov(Z_t, u_t) = 0$ (5)

Άρα

$$\begin{aligned} Cov(P_t, u_t) &\stackrel{(4)}{=} Cov(2,2 + 0,8P_{t-1} + 0,3Z_t - 0,6u_t, u_t) \\ &= 0,8Cov(P_{t-1}, u_t) + 0,3Cov(Z_t, u_t) - 0,6Cov(u_t, u_t) \\ &\stackrel{(5)}{=} -0,6V(u_t) \neq 0 \end{aligned}$$

Αφού ισχύει ότι: $Corr(P_t, u_t) \neq 0 \Rightarrow$ η ερμηνευτική μεταβλητή P συσχετίζεται ταυτό-

χρονα με το σφάλμα $u \Rightarrow$ η ερμηνευτική μεταβλητή P είναι ενδογενής \Rightarrow υπάρχει ενδογένεια στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Άρα, ο OLS εκτιμητής $\hat{\beta}$ των συντελεστών β είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής.

Κάνουμε μέθοδο IV:

Οι μεταβλητές P_{t-1} είναι βοηθητική μεταβλητή για την ενδογενή ερμηνευτική P_t , διότι

- 1) Η μεταβλητή P_{t-1} δεν περιλαμβάνεται στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.
- 2) Η μεταβλητή P_{t-1} είναι ταυτόχρονα συσχετισμένη με την ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή P_t , αφού (4) $\Rightarrow \text{Corr}(P_{t-1}, P_t) \neq 0, t = 1, \dots, T$.
- 3) Η μεταβλητή P_{t-1} είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστη με το σφάλμα u , αφού (5) $\Rightarrow \text{Corr}(P_{t-1}, u_t) = 0, t = 1, \dots, T$.

Η μεταβλητή Z_t δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για βοηθητική μεταβλητή για την ενδογενή ερμηνευτική P_t , αφού η μεταβλητή Z_t περιλαμβάνεται στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.

Ορίζουμε τον πίνακα Z

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{T1} & Z_{T2} & Z_{T3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & P_0 & Z_1 & E_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_{T-1} & Z_T & E_T \end{pmatrix}$$

Ο IV εκτιμητής του β είναι

$$\hat{\beta}^{IV} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

Ο IV εκτιμητής $\hat{\beta}^{IV}$ των συντελεστών β είναι συνεπής εκτιμητής.

