ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 06

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θέμα 2, Σεπτέμβριος 2017

α) Επίδραση του ρυθμού ανάπτυξης στο επιτόκιο είναι αρνητική $\Leftrightarrow \beta_2 < 0$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_2 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_2 < 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_2 - \beta_2^*}{s_{\widehat{\beta}_2}} = \frac{0{,}12 - 0}{0{,}06} = 2$

Κρίσιμη περιοχή: $t < -t_{T-K-1,\,\alpha} = -t_{43-2-1,\,0{,}05} = -t_{40,\,0{,}05} \simeq -Z_{0{,}05} = -1,645$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Η επίδραση του ρυθμού ανάπτυξης στο επιτόκιο δεν είναι αρνητική.

β) Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (2) γίνεται στατιστικός έλεγχος για ετεροσκεδαστικότητα.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Pagan-Godfrey για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \alpha_2 \pi_t^2$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \alpha_2 \pi_t^2 + \varepsilon_t \quad (2)$

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ έναντι $H_1 : \alpha_1 \neq 0$ ή/και $\alpha_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $BPG = TR^2 = 43 \cdot 0,05 = 2,15$

Κρίσιμη περιοχή: $BPG > \chi^2_{m,\,\alpha} = \chi^2_{2,\,0,05} = 5,991$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα της μορφής $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \alpha_2 \pi_t^2$.

Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (3) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση έως 3ης-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \pi_t + \gamma_2 g_t + \rho_1 \widehat{u}_{t-1} + \rho_2 \widehat{u}_{t-2} + \rho_3 \widehat{u}_{t-3} + \varepsilon_t \quad (3)$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\rho_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T - p)R^2 = (43 - 3) \cdot 0,1 = 4$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi^2_{p,\,\alpha} = \chi^2_{3,\,0,05} = 7,815$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως $3^{ης}$-τάξης.

Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα και αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές.

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος, συνεπής και άριστος εκτιμητής. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\beta})$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτός του ερωτήματος α)) είναι αξιόπιστοι.

γ) Ορίζουμε τη ψευδομεταβλητή D:

$$D_t = \begin{cases} 1, & \text{αν παρατήρηση } t : \pi_t > 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο συντελεστής παλινδρόμησης του πληθωρισμού είναι υψηλότερος όταν ο πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του 2% σε σχέση με όταν είναι ίσος ή μικρότερος του 2%. Άρα, εισάγουμε στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) την πολλαπλασιαστική ψευδομεταβλητή $\pi \cdot D$. Έχουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$(*)\ i_t = \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \delta_1(\pi_t \cdot D_t) + \alpha_2 g_t + \varepsilon_t$$

Όταν ο πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του 2% ($D_t = 1$):

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow i_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \delta_1(\pi_t \cdot 1) + \alpha_2 g_t + \varepsilon_t \Rightarrow \\ i_t &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \delta_1)\pi_t + \alpha_2 g_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Όταν ο πληθωρισμός είναι ίσος ή μικρότερος του 2% ($D_t = 0$):

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow i_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \delta_1(\pi_t \cdot 0) + \alpha_2 g_t + \varepsilon_t \Rightarrow \\ i_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \pi_t + \alpha_2 g_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Ο συντελεστής παλινδρόμησης του πληθωρισμού είναι υψηλότερος όταν ο πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του 2% σε σχέση με όταν είναι ίσος ή μικρότερος του 2% $\Leftrightarrow$
$\alpha_1 + \delta_1 > \alpha_1 \Leftrightarrow$
$\delta_1 > 0$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \delta_1 = 0$ έναντι $H_1 : \delta_1 > 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\delta}_1 - \delta_1^*}{s_{\widehat{\delta}_1}} = \frac{\widehat{\delta}_1}{s_{\widehat{\delta}_1}}$

Κρίσιμη περιοχή: $t > t_{T-K-1,\,\alpha} = t_{43-3-1,\,0{,}05} = t_{39,\,0{,}05} \simeq Z_{0{,}05} = 1,645$

- Αν απορρίπταμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.
  Σχόλιο: Η επίδραση του πληθωρισμού στο επιτόκιο είναι υψηλότερη όταν ο πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του 2% σε σχέση με όταν είναι ίσος ή μικρότερος του 2%.

- Αν δεν απορρίπταμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.
  Σχόλιο: Η επίδραση του πληθωρισμού στο επιτόκιο δεν είναι υψηλότερη όταν ο

πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του 2% σε σχέση με όταν είναι ίσος ή μικρότερος του 2%.

δ) Έχουμε τα υποδείγματα παλινδρόμησης:

(4) $r_t = \alpha_0 + \alpha_1 g_t + \varepsilon_t \Rightarrow i_t - \pi_t = \alpha_0 + \alpha_1 g_t + \varepsilon_t \Rightarrow i_t = \alpha_0 + \pi_t + \alpha_1 g_t + \varepsilon_t \;\; (R)$

(1) $i_t = \beta_0 + \beta_1 \pi_t + \beta_2 g_t + u_t \;\; (U)$

Το υπόδειγμα (4) είναι ειδική περίπτωση του (1) με γραμμικό περιορισμό $\beta_1 = 1$. Βάσει των (1) και (4) ελέγχουμε την υπόθεση ότι ο γραμμικός περιορισμός $\beta_1 = 1$ ισχύει.

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = 1$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 1$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1^*}{s_{\widehat{\beta}_1}} = \frac{1{,}08 - 1}{0{,}02} = 4$

Κρίσιμη περιοχή: $|t| > t_{T-K-1,\, \alpha/2} = t_{43-2-1,\, 0{,}05/2} = t_{40,\, 0{,}025} \simeq Z_{0{,}025} = 1,96$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Ο γραμμικός περιορισμός $\beta_1 = 1$ δεν ισχύει.

Θέμα 2, Φεβρουάριος 2013

α) β_2: ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία

Μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση παραγωγής

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t \Leftrightarrow \\
\ln(Y_t) &= \ln\left(\beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t\right) \Leftrightarrow \\
\ln(Y_t) &= \ln(\beta_0) + \ln\left(K_t^{\beta_1}\right) + \ln\left(L_t^{\beta_2}\right) + \ln(\varepsilon_t) \Leftrightarrow \\
\ln(Y_t) &= \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + \ln(\varepsilon_t) \Leftrightarrow \\
\ln(Y_t) &= \beta_0^* + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + u_t \ (1)
\end{aligned}
$$

όπου $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ και $u_t = \ln(\varepsilon_t)$.

Το θεωρητικό υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) αντιστοιχεί στο εκτιμώμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1).

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_2 = 1$ έναντι $H_1 : \beta_2 < 1$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_2 - \beta_2^*}{s_{\widehat{\beta}_2}} = \frac{0{,}9-1}{0{,}01} = -10$

Κρίσιμη περιοχή: $t < -t_{T-K-1,\,\alpha} = -t_{23-2-1,\,0{,}05} = -t_{20,\,0{,}05} = -1,725$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Η ελαστικότητα του προϊόντος ως προς την εργασία είναι μικρότερη της μονάδας.

β) Έχουμε τα υποδείγματα παλινδρόμησης:

(1) $\ln(Y_t) = \beta_0^* + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + u_t \;\; (U)$

(2) $\ln(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1(\ln(K_t) + 3\ln(L_t)) + \varepsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_t) + 3\alpha_1 \ln(L_t) + \varepsilon_t \;\; (R)$

Το υπόδειγμα (2) είναι ειδική περίπτωση του (1) με γραμμικό περιορισμό $\beta_2 = 3\beta_1$. $(\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = 3\alpha_1 \Rightarrow \beta_2 = 3\beta_1)$

Βάσει των (1) και (2) ελέγχουμε την υπόθεση ότι ο γραμμικός περιορισμός $\beta_2 = 3\beta_1$ ισχύει.

Στατιστικός έλεγχος για έναν γραμμικό περιορισμό

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_2 = 3\beta_1$ έναντι $H_1 : \beta_2 \neq 3\beta_1$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/q}{SSE_U/(T-K-1)} = \frac{(4-2)/1}{2/(23-2-1)} = 20$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{q,\,T-K-1,\,\alpha} = F_{1,\,20,\,0{,}05} = 4{,}351$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$.

Σχόλιο: Ο γραμμικός περιορισμός $\beta_2 = 3\beta_1$ δεν ισχύει.

γ) Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (3) γίνεται στατιστικός έλεγχος για ετεροσκεδαστικότητα.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Pagan-Godfrey για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 K_t^2 + \alpha_2 L_t^4$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 K_t^2 + \alpha_2 L_t^4 + \varepsilon_t \quad (3)$

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ έναντι $H_1 : \alpha_1 \neq 0$ ή/και $\alpha_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $BPG = TR^2 = 23 \cdot 0,1 = 2,3$

Κρίσιμη περιοχή: $BPG > \chi^2_{m,\,\alpha} = \chi^2_{2,\,0{,}05} = 5,991$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα της μορφής $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 K_t^2 + \alpha_2 L_t^4$.

Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (4) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση έως 2ης-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln(K_t) + \gamma_2 \ln(L_t) + \rho_1 \widehat{u}_{t-1} + \rho_2 \widehat{u}_{t-2} + \varepsilon_t \quad (4)$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = 0$ έναντι $H_1 : \rho_1 \neq 0$ ή/και $\rho_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T - p)R^2 = (23 - 2) \cdot 0,4 = 8,4$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi^2_{p,\,\alpha} = \chi^2_{2,\,0{,}05} = 5,991$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως $2^{ης}$-τάξης.

Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα και υπάρχει αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές.

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής, αλλά δεν είναι άριστος. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\beta})$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτοί των ερωτημάτων α) και β)) είναι αναξιόπιστοι.

δ) Ισχύει ότι: $u_t = -0,5u_{t-1} + w_t$ (5) $\Rightarrow Corr(u_t, u_{t-1}) \neq 0 \Rightarrow$ υπάρχει αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές. Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής, αλλά δεν είναι άριστος.

Κάνουμε μέθοδο GLS: Μετασχηματίζουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow \ln(Y_t) = \beta_0^* + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + u_t \\ (1) \Rightarrow 0,5\ln(Y_{t-1}) = 0,5\beta_0^* + 0,5\beta_1 \ln(K_{t-1}) + 0,5\beta_2 \ln(L_{t-1}) + 0,5u_{t-1}\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{aligned}\ln(Y_t) + 0,5\ln(Y_{t-1}) &= \beta_0^* + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + u_t + \\ &\quad + 0,5\beta_0^* + 0,5\beta_1 \ln(K_{t-1}) + 0,5\beta_2 \ln(L_{t-1}) + 0,5u_{t-1} \Rightarrow \\ \ln(Y_t) + 0,5\ln(Y_{t-1}) &= 1,5\beta_0^* + \beta_1(\ln(K_t) + 0,5\ln(K_{t-1})) + \\ &\quad + \beta_2(\ln(L_t) + 0,5\ln(L_{t-1})) + u_t + 0,5u_{t-1} \Rightarrow \\ Y_t^* &= \beta_0^{**} + \beta_1 K_t^* + \beta_2 L_t^* + u_t^* \qquad (*)\end{aligned}$$

όπου $Y_t^* = \ln(Y_t) + 0,5\ln(Y_{t-1})$, $\beta_0^{**} = 1,5\beta_0^* = 1,5\ln(\beta_0)$, $K_t^* = \ln(K_t) + 0,5\ln(K_{t-1})$, $L_t^* = \ln(L_t) + 0,5\ln(L_{t-1})$ και $u_t^* = u_t + 0,5u_{t-1}$.

Στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης (*) δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση αφού

$$u_t^* = u_t + 0,5u_{t-1} \overset{(5)}{=} -0,5u_{t-1} + w_t + 0,5u_{t-1} = w_t$$

με

$$Cov(w_t, w_s) = E(w_t w_s) - E(w_t)E(w_s) = 0 \Rightarrow Corr(w_t, w_s) = 0, t, s = 1, ..., T, t \neq s$$

αφού $E(w_t) = 0$ και $E(w_t w_s) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

Εκτιμάμε με μέθοδο OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης (*). Αυτό είναι ισοδύναμο με μέθοδο GLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) με αυτοσυσχέτιση (5). Ο GLS εκτιμητής $\widehat{\beta}^{GLS}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος, συνεπής και άριστος εκτιμητής.