ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 10

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θέμα 2, Ιούνιος 2014

α) Μετασχηματίζουμε τη συνάρτηση παραγωγής

$$Y_t = \beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \ln\left(\beta_0 K_t^{\beta_1} L_t^{\beta_2} \varepsilon_t\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \ln\left(K_t^{\beta_1}\right) + \ln\left(L_t^{\beta_2}\right) + \ln(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + \ln(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\ln(Y_t) = \beta_0^* + \beta_1 \ln(K_t) + \beta_2 \ln(L_t) + u_t \; (1)$$

όπου $\beta_0^* = \ln(\beta_0)$ και $u_t = \ln(\varepsilon_t)$.

Το θεωρητικό υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) αντιστοιχεί στο εκτιμώμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1).

Στατιστικός έλεγχος για σημαντικότητα υποδείγματος

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 0$ ή/και $\beta_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{(SST - SSE)/K}{SSE/(T-K-1)} = \frac{(0{,}1 - 0{,}05)/2}{0{,}05/(23-2-1)} = 10$

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{K,\, T-K-1,\, \alpha} = F_{2,\, 20,\, 0{,}05} = 3,493$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Το υπόδειγμα είναι σημαντικό.

β) β_1: ελαστικότητα προϊόντος ως προς το κεφάλαιο

β_2: ελαστικότητα προϊόντος ως προς την εργασία

Το άθροισμα των ελαστικοτήτων του προϊόντος ως προς το κεφάλαιο και την εργασία είναι μικρότερο της μονάδας $\Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 < 1$

Στατιστικός έλεγχος για έναν γραμμικό περιορισμό

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$ έναντι $H_1 : \beta_1 + \beta_2 < 1$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\delta' \widehat{\beta} - \pi}{s_{\delta' \widehat{\beta}}} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 - 1}{s_{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2}} = \frac{0{,}35 + 0{,}46 - 1}{0{,}1} = -1,9$

όπου

$$s_{\widehat{\beta}_1+\widehat{\beta}_2} = \sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2)} = \sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_2) + 2 \cdot \widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}$$

$$= \sqrt{s^2_{\widehat{\beta}_1} + s^2_{\widehat{\beta}_2} + 2 \cdot \widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)} = \sqrt{0,1^2 + 0,2^2 + 2 \cdot (-0,02)} = \sqrt{0,01} = 0,1$$

Κρίσιμη περιοχή: $t < -t_{T-K-1,\,\alpha} = -t_{23-2-1,\,0{,}05} = -t_{20,\,0{,}05} = -1,725$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Το άθροισμα των ελαστικοτήτων του προϊόντος ως προς το κεφάλαιο και την εργασία είναι μικρότερο της μονάδας.

γ) Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (2) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση $1^{ης}$-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \eta_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln(K_t) + \gamma_2 \ln(L_t) + \rho_1 \widehat{u}_{t-1} + \eta_t \quad (2)$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = 0$ έναντι $H_1 : \rho_1 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T-p)R^2 = (23-1) \cdot 0,1 = 2,2$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi^2_{p,\,\alpha} = \chi^2_{1,\,0{,}05} = 3,841$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση $1^{ης}$-τάξης.

Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (3) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση έως $3^{ης}$-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \eta_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln(K_t) + \gamma_2 \ln(L_t) + \rho_1 \widehat{u}_{t-1} + \rho_2 \widehat{u}_{t-2} + \rho_3 \widehat{u}_{t-3} + \eta_t$ (3)

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\rho_j \neq 0,\ j = 1,2,3$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T-p)R^2 = (23-3) \cdot 0,3 = 6$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi^2_{p,\,\alpha} = \chi^2_{3,\,0{,}05} = 7,815$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως $3^{ης}$-τάξης.

Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές.

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος, συνεπής και άριστος εκτιμητής. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\beta})$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτοί των ερωτημάτων α) και β)) είναι αξιόπιστοι.

δ) Ισχύει ότι: $V(u_t) = \sigma^2|\beta_0 + \beta_1 K_t| = \sigma^2\delta_t$ με $\delta_t = |\beta_0 + \beta_1 K_t|$ (4) $\Rightarrow V(u_t) = \sigma_t^2 \neq$ σταθερή για κάποια $t = 1, ..., T$ (αφού $K_t \neq$ σταθερή για κάποια $t = 1, ..., T$)

$\Rightarrow$ υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν περιλαμβάνει υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτικές μεταβλητές. Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής, αλλά δεν είναι άριστος. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\beta})$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτοί των ερωτημάτων α) και β)) είναι αναξιόπιστοι.

Κάνουμε μέθοδο FGLS: Μετασχηματίζουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$(1) \Rightarrow \frac{\ln(Y_t)}{\sqrt{\delta_t}} = \beta_0^* \frac{1}{\sqrt{\delta_t}} + \beta_1 \frac{\ln(K_t)}{\sqrt{\delta_t}} + \beta_2 \frac{\ln(L_t)}{\sqrt{\delta_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{\delta_t}} \Rightarrow$$

$$Y_t^* = \beta_0^* X_{t0}^* + \beta_1 X_{t1}^* + \beta_2 X_{t2}^* + u_t^* \qquad (*)$$

όπου $Y_t^* = \frac{\ln(Y_t)}{\sqrt{\delta_t}}$, $X_{t0}^* = \frac{1}{\sqrt{\delta_t}}$, $X_{t1}^* = \frac{\ln(K_t)}{\sqrt{\delta_t}}$, $X_{t2}^* = \frac{\ln(L_t)}{\sqrt{\delta_t}}$ και $u_t^* = \frac{u_t}{\sqrt{\delta_t}}$.

Στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα παλινδρόμησης $(*)$ δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα αφού

$$V(u_t^*) = V\left(\frac{u_t}{\sqrt{\delta_t}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta_t}}\right)^2 V(u_t) \overset{(4)}{=} \frac{1}{\delta_t}\sigma^2\delta_t = \sigma^2, t = 1, ..., T$$

Αφού τα $\delta_t = |\beta_0 + \beta_1 K_t|$ είναι άγνωστα, πρέπει να βρούμε συνεπείς εκτιμητές $\widehat{\delta}_t$.
Ισχύει ότι: $\beta_0^* = \ln(\beta_0) \Leftrightarrow \beta_0 = e^{\beta_0^*} \Rightarrow \widehat{\beta}_0 = e^{\widehat{\beta}_0^*}$.
Ορίζουμε: $\widehat{\delta}_t = |\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 K_t| = |e^{\widehat{\beta}_0^*} + \widehat{\beta}_1 K_t| = |e^{-1,51} + 0,35K_t| = |0,221 + 0,35K_t|$.
Οι OLS εκτιμητές $\widehat{\beta}_0^*$ και $\widehat{\beta}_1$ είναι συνεπείς εκτιμητές των συντελεστών β_0^* και β_1.
Άρα, οι OLS εκτιμητές $\widehat{\beta}_0$ και $\widehat{\beta}_1$ είναι συνεπείς εκτιμητές των συντελεστών β_0 και β_1.
Επομένως, τα $\widehat{\delta}_t$ είναι συνεπείς εκτιμητές των δ_t.

Αντικαθιστούμε στο $(*)$ τα δ_t με τα $\widehat{\delta}_t$. Εκτιμάμε με μέθοδο OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης $(*)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με μέθοδο FGLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) με ετεροσκεδαστικότητα (4). Ο FGLS εκτιμητής $\widehat{\beta}^{FGLS}$ των συντελεστών β είναι συνεπής και ασυμπτωτικά άριστος εκτιμητής. Επίσης, ο FGLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta}^{FGLS})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\beta}^{FGLS})$ είναι συνεπής εκτιμητής. Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F βάσει της μεθόδου FGLS είναι αξιόπιστοι (σε μεγάλα δείγματα).

Θέμα 3, Σεπτέμβριος 2015

α) i) Ισχύει ότι

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma(Y_t^* - Y_{t-1}) \Leftrightarrow$$
$$\gamma Y_t^* = Y_t - (1-\gamma)Y_{t-1} \Leftrightarrow$$
$$Y_t^* = \frac{1}{\gamma}Y_t - \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1}$$

και

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_{t-2} + u_t \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\gamma}Y_t - \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-2} + u_t \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\gamma}Y_t = \beta_0 + \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} + \beta_1 X_{t-2} + u_t \Rightarrow$$
$$Y_t = \beta_0\gamma + (1-\gamma)Y_{t-1} + \beta_1\gamma X_{t-2} + \gamma u_t \Rightarrow$$
$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \ (1)$$

όπου $\alpha_0 = \beta_0\gamma$, $\alpha_1 = 1-\gamma$, $\alpha_2 = \beta_1\gamma$ και $\varepsilon_t = \gamma u_t$.

Το θεωρητικό υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) αντιστοιχεί στο εκτιμώμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1).

OLS εκτιμητής $\widehat{\gamma}$ του βαθμού προσαρμογής γ:

$$\alpha_1 = 1 - \gamma \Leftrightarrow \gamma = 1 - \alpha_1 \Rightarrow \widehat{\gamma} = 1 - \widehat{\alpha}_1 = 1 - 0,15 = 0,85$$

Βαθμός προσαρμογής είναι μεγαλύτερος του 0,75 $\Leftrightarrow \gamma > 0,75 \overset{\alpha_1 = 1-\gamma}{\Leftrightarrow} \alpha_1 < 0,25$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = 0,25$ έναντι $H_1 : \alpha_1 < 0,25$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\alpha}_1 - \alpha_1^*}{s_{\widehat{\alpha}_1}} = \frac{0,15-0,25}{0,05} = -2$

Κρίσιμη περιοχή: $t < -t_{T-K-1,\alpha} = -t_{22-2-1,\,0,05} = -t_{19,\,0,05} = -1,729$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Βαθμός προσαρμογής είναι μεγαλύτερος του 0,75.

ii) Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

(1) $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

Βραχυχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi_0 = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_t} = 0$$

(οι ερμηνευτικές μεταβλητές Y_{t-1}, X_{t-2} δεν θα μεταβληθούν γιατί είναι προκαθορισμένες τη χρονική περίοδο t)

Μακροχρόνια, οι μεταβλητές είναι σε ισορροπία $\Rightarrow Y_t = Y_{t-1} = \widetilde{Y}$, $X_{t-2} = \widetilde{X}$ και $\varepsilon_t = \widetilde{\varepsilon} = E(\varepsilon_t) = 0$, όπου $\widetilde{Y}$, $\widetilde{X}$ και $\widetilde{\varepsilon}$ είναι οι μακροχρόνιες τιμές των μεταβλητών Y, X και ε, αντίστοιχα.

Μακροχρόνια, το υπόδειγμα (1) είναι

$$\widetilde{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 \widetilde{Y} + \alpha_2 \widetilde{X} + \widetilde{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha_1)\widetilde{Y} = \alpha_0 + \alpha_2 \widetilde{X} + 0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{Y} = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\widetilde{X}$$

Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi = \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \widetilde{X}} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} \Rightarrow \widehat{\pi} = \frac{\widehat{\alpha}_2}{1-\widehat{\alpha}_1} = \frac{-2,55}{1-0,15} = -3$$

β) Σύστημα εξισώσεων διαρθρωτικών εξισώσεων (1), (2) και (3)

(1) $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ όπου $\varepsilon_t = \gamma u_t$ (4)

(2) $X_t = \gamma_0 + \gamma_1 Z_t + \gamma_2 X_{t-1} + \eta_t$

(3) $Z_t = \delta_0 + \delta_1 Y_t + \delta_2 X_t + \delta_3 X_{t-2} + \omega_t$

όπου τα σφάλματα η_t και ω_t συσχετίζονται μεταξύ τους και με το $u_t \overset{(4)}{\Rightarrow} Corr(\eta_t, \omega_t) \neq 0$, $Corr(\eta_t, \varepsilon_t) \neq 0$ και $Corr(\omega_t, \varepsilon_t) \neq 0$ (5)

Ισχύει ότι: $\varepsilon_t \uparrow\downarrow \overset{(5)}{\Rightarrow} \eta_t \uparrow\downarrow, \omega_t \uparrow\downarrow \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} X_t \uparrow\downarrow, Z_t \uparrow\downarrow$

$\eta_t \uparrow\downarrow \overset{(5)}{\Rightarrow} \varepsilon_t \uparrow\downarrow, \omega_t \uparrow\downarrow \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} Y_t \uparrow\downarrow, Z_t \uparrow\downarrow$ (*)

$\omega_t \uparrow\downarrow \overset{(5)}{\Rightarrow} \varepsilon_t \uparrow\downarrow, \eta_t \uparrow\downarrow \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} Y_t \uparrow\downarrow, X_t \uparrow\downarrow$ (**)

$\Rightarrow$ οι μεταβλητές Y_t, X_t και Z_t καθορίζονται εντός του συστήματος εξισώσεων $\Rightarrow$ οι μεταβλητές Y_t, X_t και Z_t είναι ενδογενείς.

Ενδογενείς μεταβλητές: Y_t, X_t, Z_t

Εξωγενείς μεταβλητές: $\mathbb{1}_t$

Προκαθορισμένες μεταβλητές: $\mathbb{1}_t$, Y_{t-1}, X_{t-1}, X_{t-2}

Η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (1) είναι ήδη σε ανηγμένη μορφή, αφού περιέχει μόνο προκαθορισμένες μεταβλητές ως ερμηνευτικές ($\mathbb{1}_t, Y_{t-1}, X_{t-2}$). Άρα, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) ο OLS εκτιμητής $\widehat{\alpha}$ των συντελεστών α είναι μεροληπτικός (λόγω της υστέρησης της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτική μεταβλητή (Y_{t-1})) και συνεπής εκτιμητής.

Η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (2) περιέχει 2 ενδογενείς μεταβλητές (X_t, Z_t). Άρα, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (2) υπάρχει ερμηνευτική μεταβλητή που είναι ενδογενής (Z_t) και συσχετίζεται ταυτόχρονα με το σφάλμα (η_t) (λόγω (∗)) $\Rightarrow$ υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης που δημιουργεί ενδογένεια $\Rightarrow$ ο OLS εκτιμητής $\widehat{\gamma}$ των συντελεστών γ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής.

Η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (3) περιέχει 3 ενδογενείς μεταβλητές (Y_t, X_t, Z_t). Άρα, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (3) υπάρχουν ερμηνευτικές μεταβλητές που είναι ενδογενείς (Y_t, X_t) και συσχετίζονται ταυτόχρονα με το σφάλμα (ω_t) (λόγω (∗∗)) $\Rightarrow$

υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης που δημιουργεί ενδογένεια $\Rightarrow$ ο OLS εκτιμητής $\widehat{\delta}$ των συντελεστών δ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής.

Αφού υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης στις διαρθρωτικές εξισώσεις συμπεριφοράς (2) και (3), εξετάζουμε την ταυτοποίηση του συστήματος εξισώσεων (1), (2) και (3).

Ενδογενείς μεταβλητές: Y_t, X_t, Z_t

Εξωγενείς μεταβλητές: $\mathbb{1}_t$

Προκαθορισμένες μεταβλητές: $\mathbb{1}_t$, Y_{t-1}, X_{t-1}, X_{t-2}

Διαρθρωτική μορφή συστήματος εξισώσεων (1), (2) και (3):

$$\begin{array}{ll}
(1) & Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \\
(2) & X_t = \gamma_0 + \gamma_1 Z_t + \gamma_2 X_{t-1} + \eta_t \Leftrightarrow \\
(3) & Z_t = \delta_0 + \delta_1 Y_t + \delta_2 X_t + \delta_3 X_{t-2} + \omega_t \Leftrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccc}
(1) & Y_t & & & -\alpha_0 & -\alpha_1 Y_{t-1} & & -\alpha_2 X_{t-2} & = & \varepsilon_t \\
(2) & & X_t & -\gamma_1 Z_t & -\gamma_0 & & -\gamma_2 X_{t-1} & & = & \eta_t \\
(3) & -\delta_1 Y_t & -\delta_2 X_t & +Z_t & -\delta_0 & & & -\delta_3 X_{t-2} & = & \omega_t
\end{array}$$

Ταυτοποίηση της διαρθρωτικής εξίσωσης συμπεριφοράς (2):

1. Συνθήκη τάξης:

$$\left.\begin{array}{l} K^{**}=2 \quad (Y_{t-1}, X_{t-2}) \\ G^{*}=2 \quad (X_t, Z_t) \end{array}\right\} \Rightarrow K^{**} > G^{*}-1 \Rightarrow \text{ συνθήκη ισχύει}$$

2. Συνθήκη βαθμού:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\delta_1 & 0 & -\delta_3 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\Delta)=2 \\ G=3 \end{array}\right\} \Rightarrow r(\Delta)=G-1 \Rightarrow \text{ συνθήκη ισχύει}$$

Αφού η συνθήκη τάξης ισχύει με $>$ και η συνθήκη βαθμού ισχύει, η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (2) υπερταυτοποιείται.

Ταυτοποίηση της διαρθρωτικής εξίσωσης συμπεριφοράς (3):

1. Συνθήκη τάξης:

$$\left.\begin{array}{l} K^{**}=2 \quad (Y_{t-1}, X_{t-1}) \\ G^{*}=3 \quad (Y_t, X_t, Z_t) \end{array}\right\} \Rightarrow K^{**} = G^{*}-1 \Rightarrow \text{ συνθήκη ισχύει}$$

2. Συνθήκη βαθμού:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\Delta) = 2 \\ G = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow r(\Delta) = G - 1 \Rightarrow \text{ συνθήκη ισχύει}$$

Αφού η συνθήκη τάξης ισχύει με = και η συνθήκη βαθμού ισχύει, η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (3) ταυτοποιείται ακριβώς.

Η διαρθρωτική εξίσωση (1) δεν χρειάζεται ταυτοποίηση αφού είναι σε ανηγμένη μορφή και δεν υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης.

Επομένως, το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων (1), (2) και (3) ταυτοποιείται.

Η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (1) είναι σε ανηγμένη μορφή. Βρέθηκε ότι η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (2) υπερταυτοποιείται και η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (3) ταυτοποιείται ακριβώς. Τα σφάλματα των διαρθρωτικών εξισώσεων (1), (2) και (3) συσχετίζονται ταυτόχρονα (λόγω (5)). Άρα,

i) η μέθοδος OLS στη διαρθρωτική εξίσωση (1), η μέθοδος 2SLS στη διαρθρωτική εξίσωση (2) και η μέθοδος ILS στη διαρθρωτική εξίσωση (3) θα δώσουν συνεπείς εκτιμητές των συντελεστών α, γ, δ.

ii) η μέθοδος 3SLS στις διαρθρωτικές εξίσωσεις (1), (2) και (3) θα δώσουν συνεπείς και ασυμπτωτικά άριστους εκτιμητές των συντελεστών α, γ, δ.