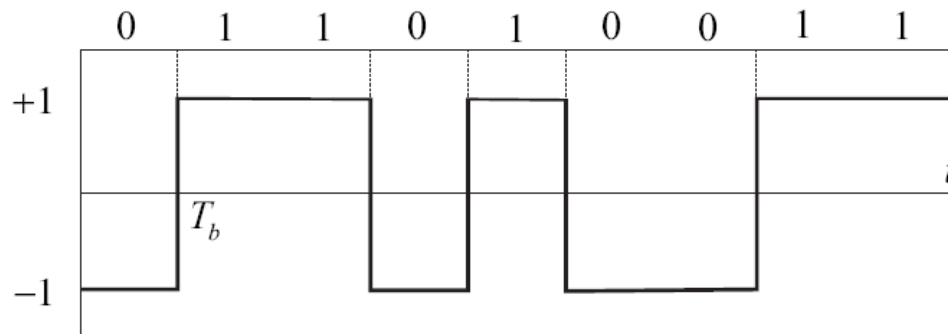

Κεφάλαιο 7

Ψηφιακή Διαμόρφωση

Ψηφιακή Διαμόρφωση

Γενικά, η έννοια της διαμόρφωσης (*modulation*) στις ψηφιακές επικοινωνίες αναφέρεται στην αντιστοίχιση της πληροφορίας που είναι σε ψηφιακή μορφή (bits), σε ένα ορισμένο αριθμό αναλογικών κυματομορφών κατάλληλων για μετάδοση στο φυσικό μέσο-κανάλι.



Διαμόρφωση βασικής ζώνης

Η ψηφιακή πληροφορία μεταδίδεται απ' ευθείας με τεχνικές διαμόρφωσης παλμών βασικής ζώνης, οι οποίες δεν απαιτούν τη χρήση ημιτονοειδούς φέροντος για τη μετατόπιση του φάσματος του εκπεμπόμενου σήματος.

Γιατί διαμόρφωση βασικής ζώνης;

- Κατάλληλη προσαρμογή στα επιθυμητά φασματικά χαρακτηριστικά. (π.χ. Αποφυγή DC)
- Επαρκείς μεταβάσεις της στάθμης του σήματος για συγχρονισμό.
- Αντοχή στο θόρυβο.

Παραδείγματα καναλιών βασικής ζώνης είναι:

- Οι ενσύρματες ζεύξεις όπως π.χ. τα ομοαξονικά καλώδια
- Οι απλές τηλεφωνικές γραμμές συνεστραμμένου ζεύγους (twisted-pair).

Διαμόρφωση βασικής ζώνης

Γιατί στις περισσότερες περιπτώσεις δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαμόρφωση βασικής ζώνης;

- ❑ Οι διαστάσεις της απαιτούμενης κεραίας είναι εξωπραγματικές. Οι φυσικές διαστάσεις μιας κεραίας σχετίζονται με την συχνότητα λειτουργίας. Για παράδειγμα, ένα δίπολο ημίσεως κύματος έχει μήκος περίπου όσο το μισό μήκος κύματος.
- ❑ Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο φάσμα χαμηλών συχνοτήτων για περισσότερες από μια μεταδόσεις.

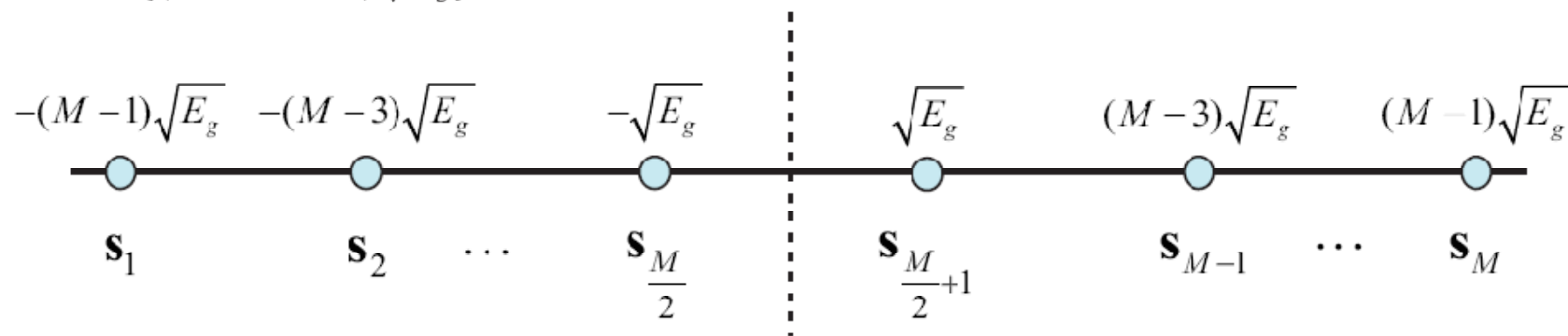
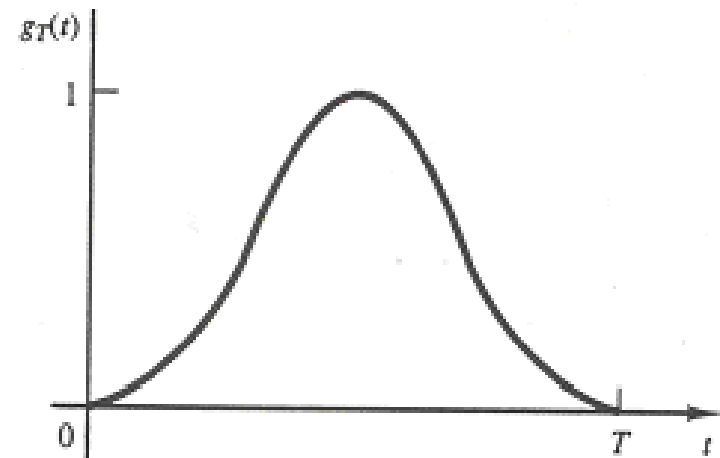
Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Pulse Amplitude Modulation-PAM

$$s_i(t) = \begin{cases} (2i - M - 1)g(t), & t \in [0, T] \\ 0, & \text{αλλοού} \end{cases}, i = 1, \dots, M$$

$$\phi(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_g}} \quad \mathcal{E}_g = \int_0^T |g(t)|^2 dt$$

$$s_i(t) = (2i - M - 1)\sqrt{\mathcal{E}_g}\phi(t)$$

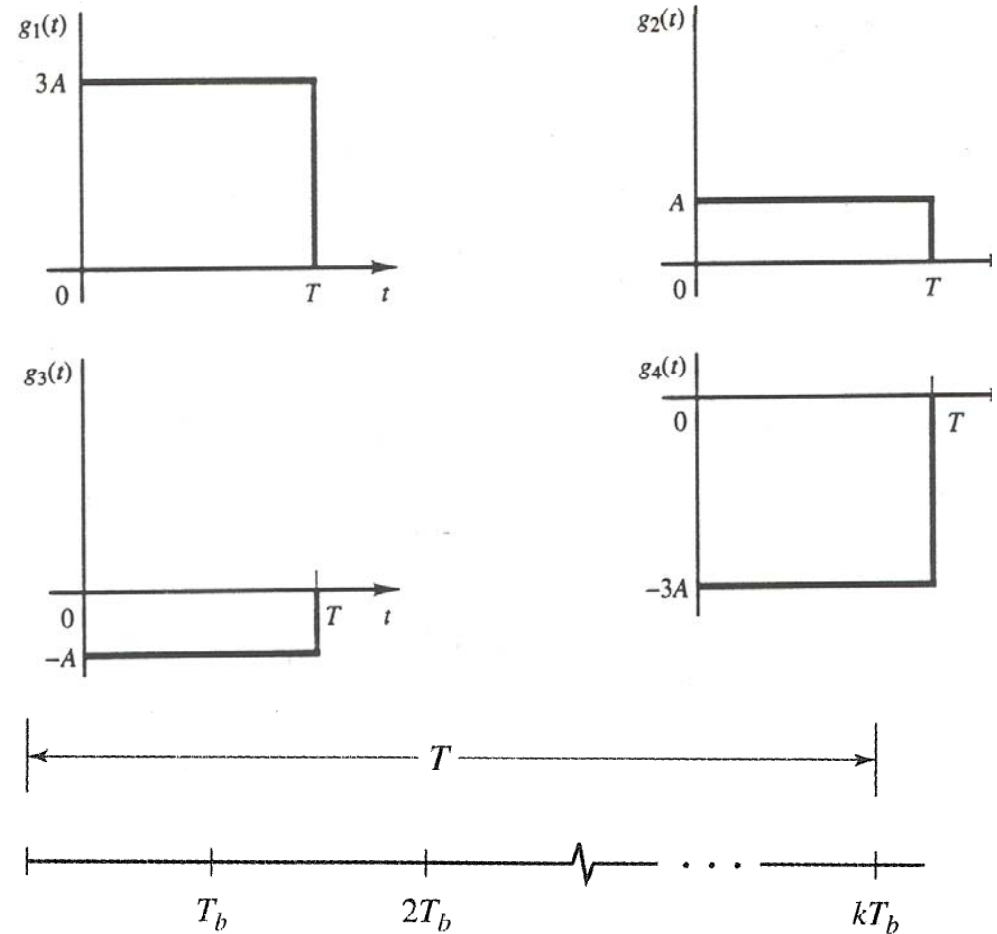
$$\mathbf{s}_i = \{(2i - M - 1)\sqrt{\mathcal{E}_g}\}$$



M-αδική Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος (M-PAM)

- Εκπέμπονται K bits ανά παλμό.
- Απαιτούνται $M=2^K$ τιμές πλάτους

Παράδειγμα: $K=2$, $M=4$.
Μεταδίδονται τα σύμβολα 00, 01, 10, 11

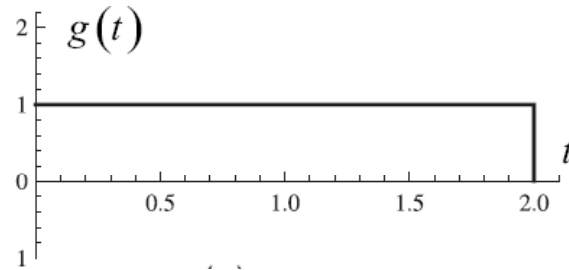


Αν ο ρυθμός μετάδοσης των bits, R_b είναι σταθερός, τότε

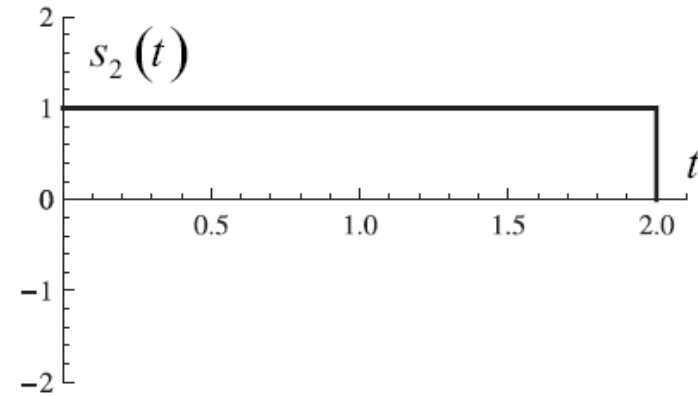
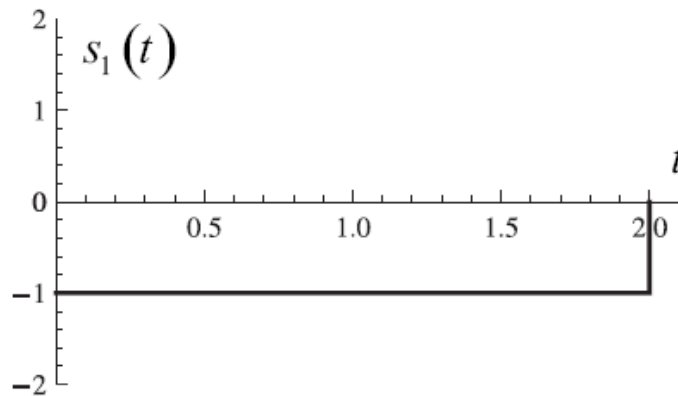
$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{KT_b}$$

M-αδική Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος (M-PAM)

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

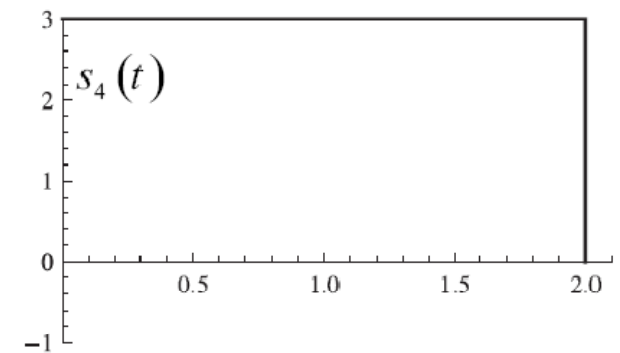
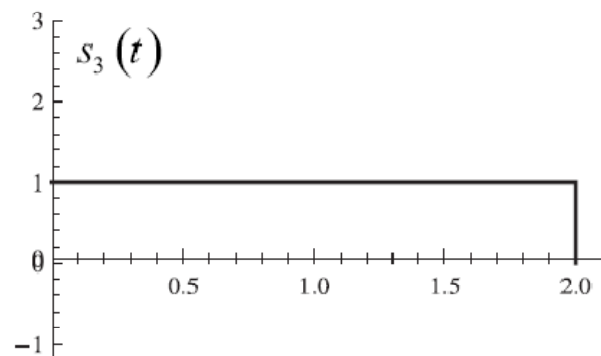
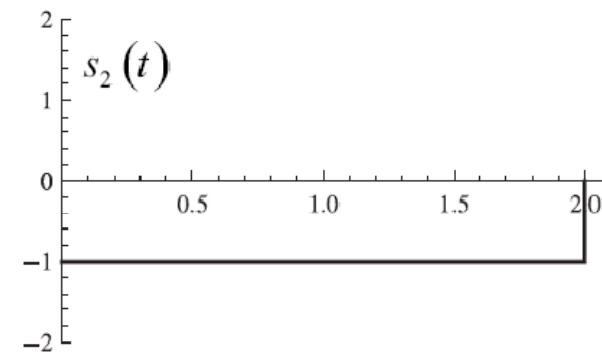
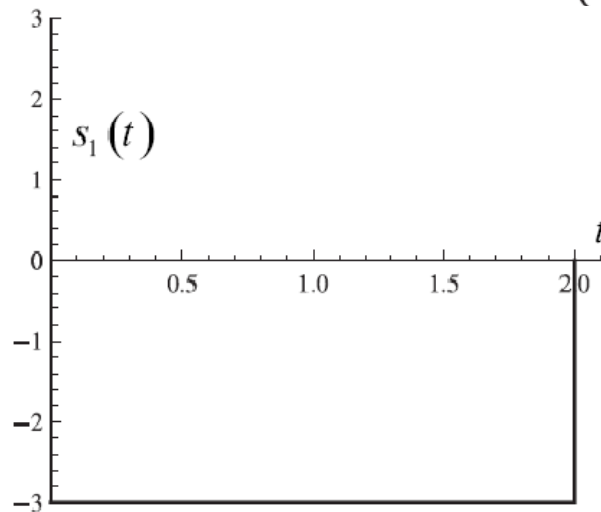


$$s_i(t) = (2i - 3)g(t) = \begin{cases} 2i - 3, & t \in [0, 2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad i = 1, 2$$




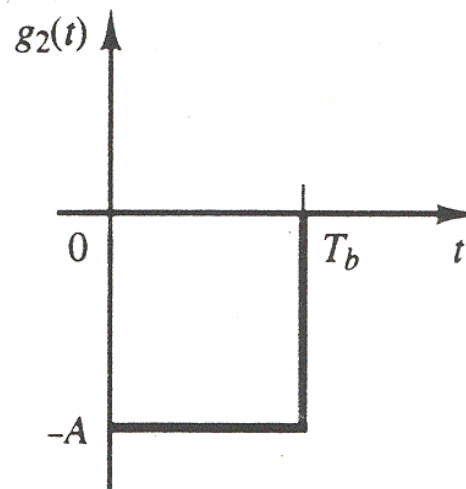
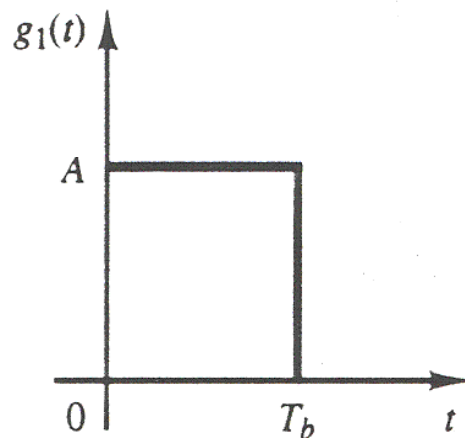
M-αδική Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος (M-PAM)

$$s_i(t) = (2i - 5)g(t) = \begin{cases} 2i - 5, & t \in [0, 2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4$$



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος, BPSK

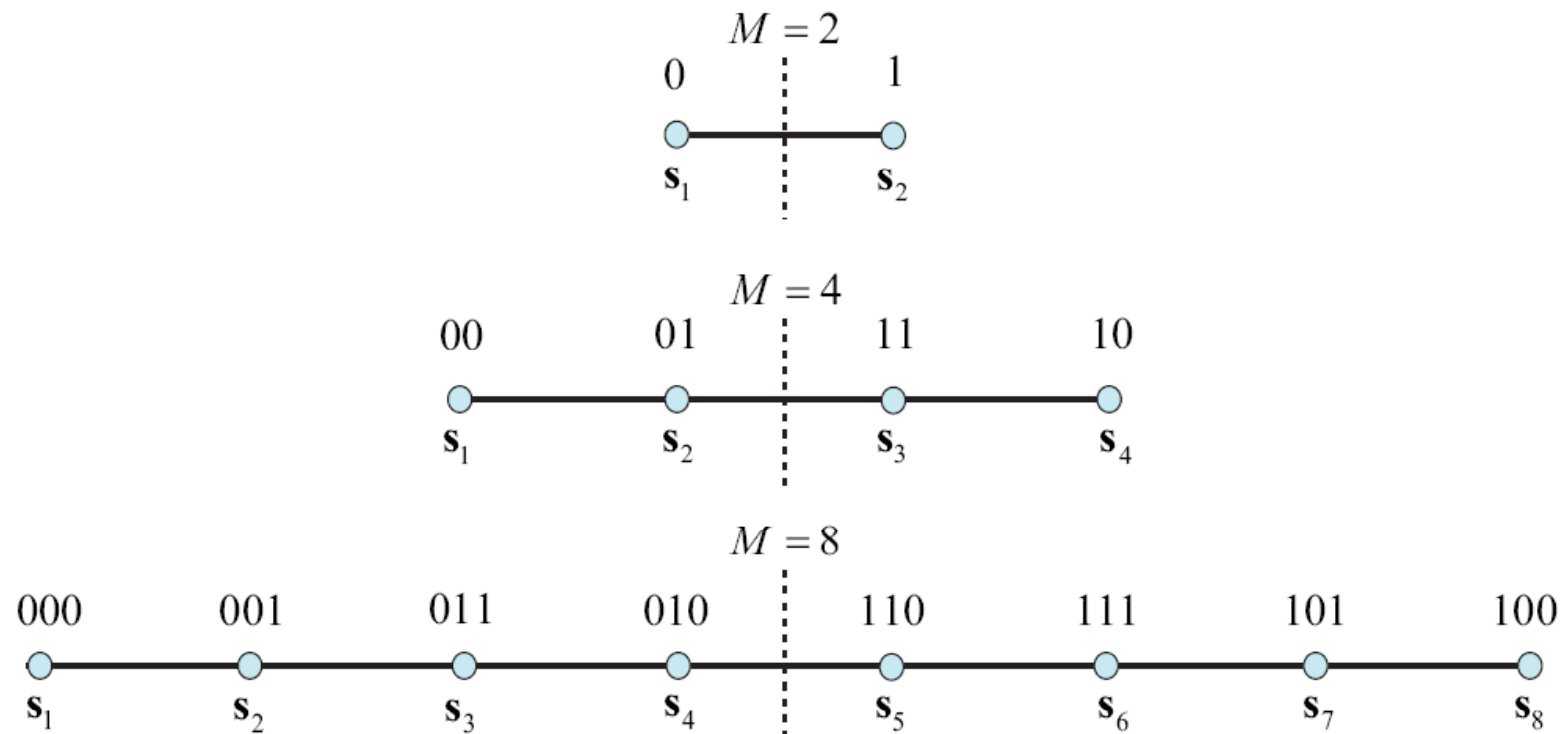
$1 \rightarrow +A$
 $0 \rightarrow -A$  Αντίποδη σηματοδότηση (Antipode signaling)



$T_b \rightarrow$ διάρκεια bit

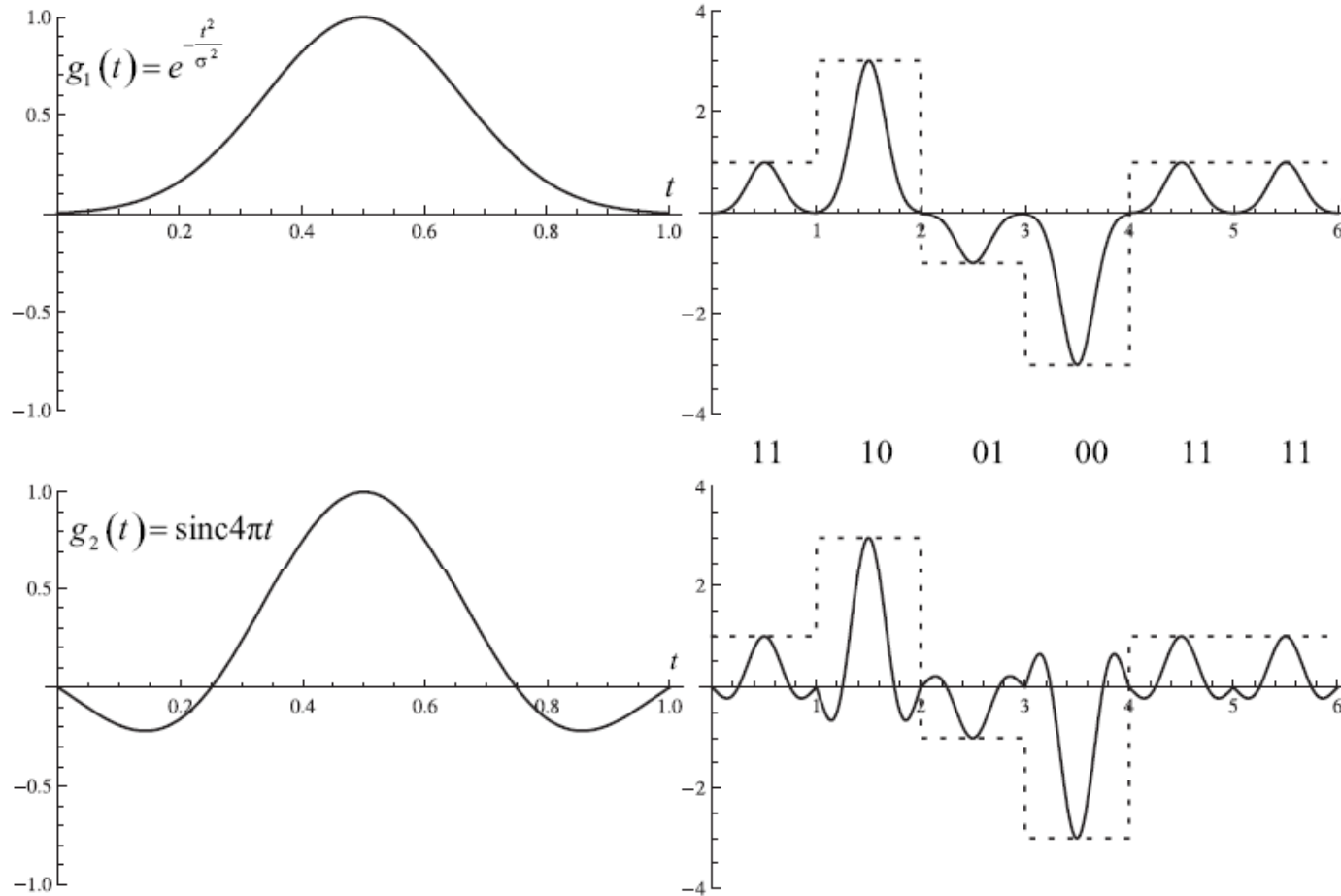
$$R_b = \frac{1}{T_b}$$

Αστερισμοί M-PAM



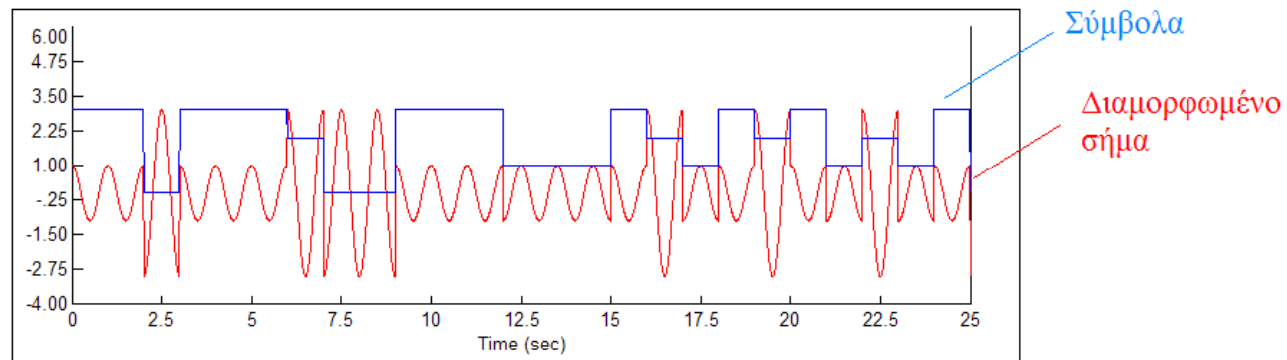
Παραδείγματα 4-PAM με κωδικοποίηση Gray

00 → -3, 01 → -1, 11 → +1, 10 → +3

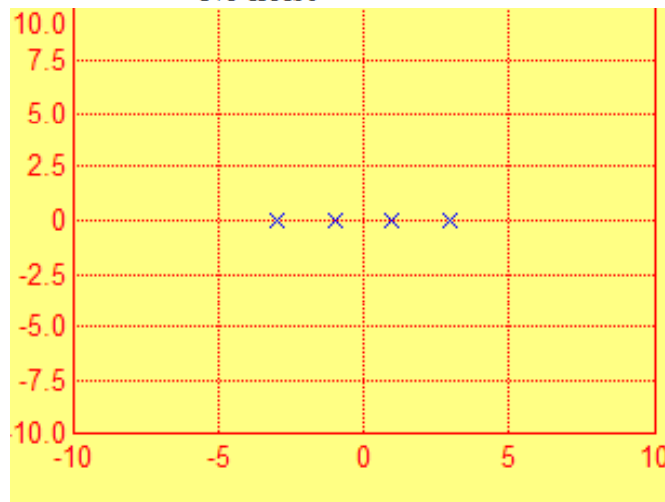


Παραδείγματα 4-PAM

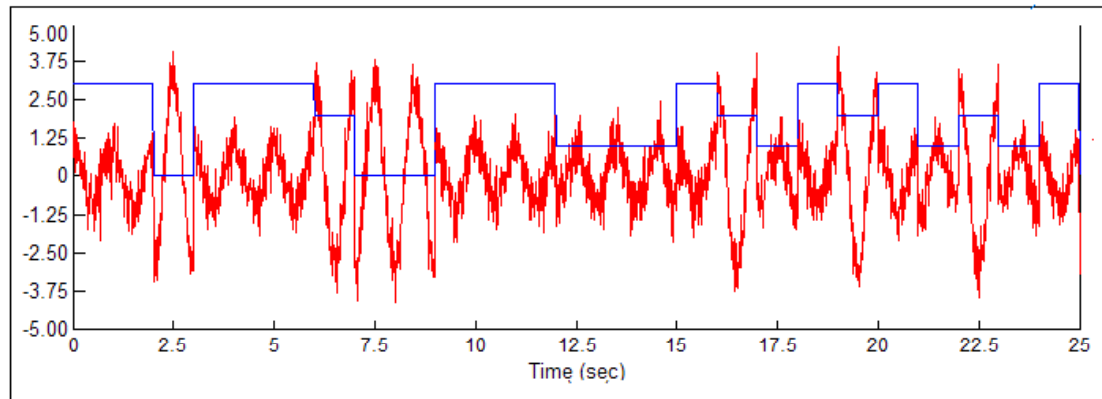
4 – PAM : 4 διαφορετικά σύμβολα που αντιστοιχούν σε δυάδες από bits (00 01 10 11).



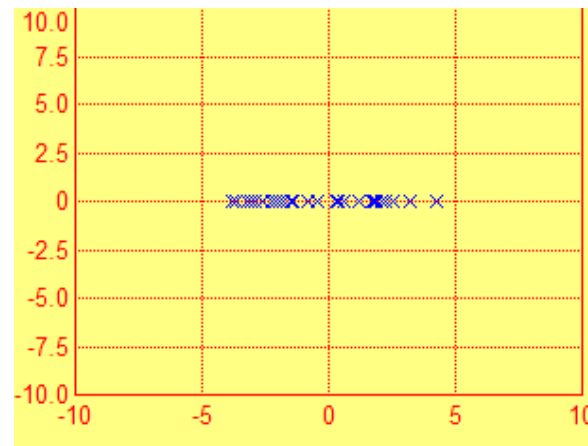
No noise



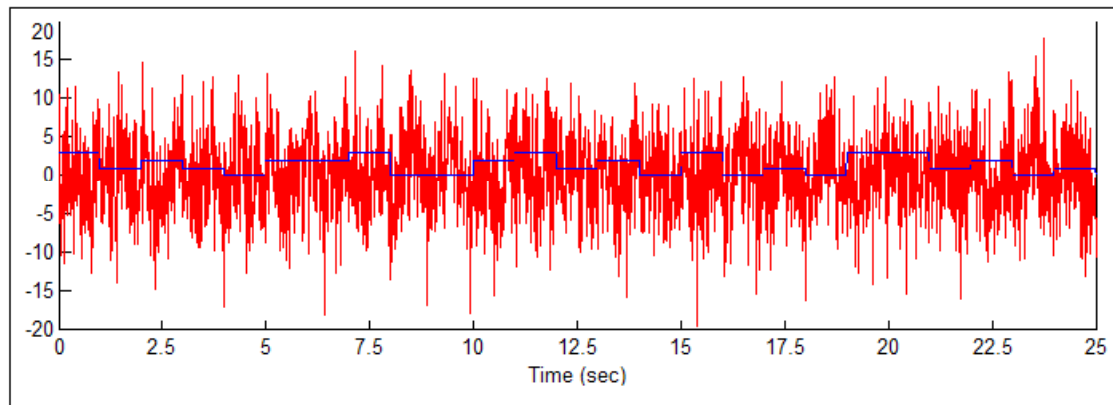
Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος



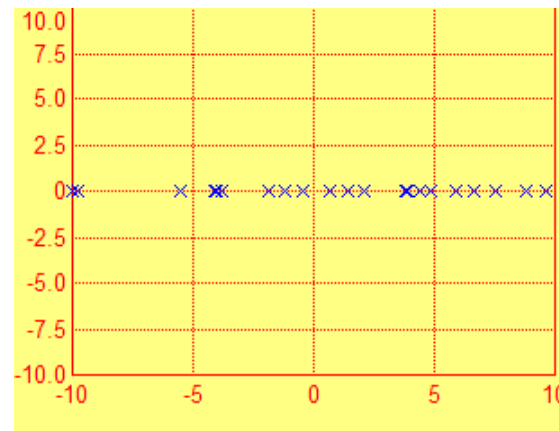
SNR=10 dB



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος



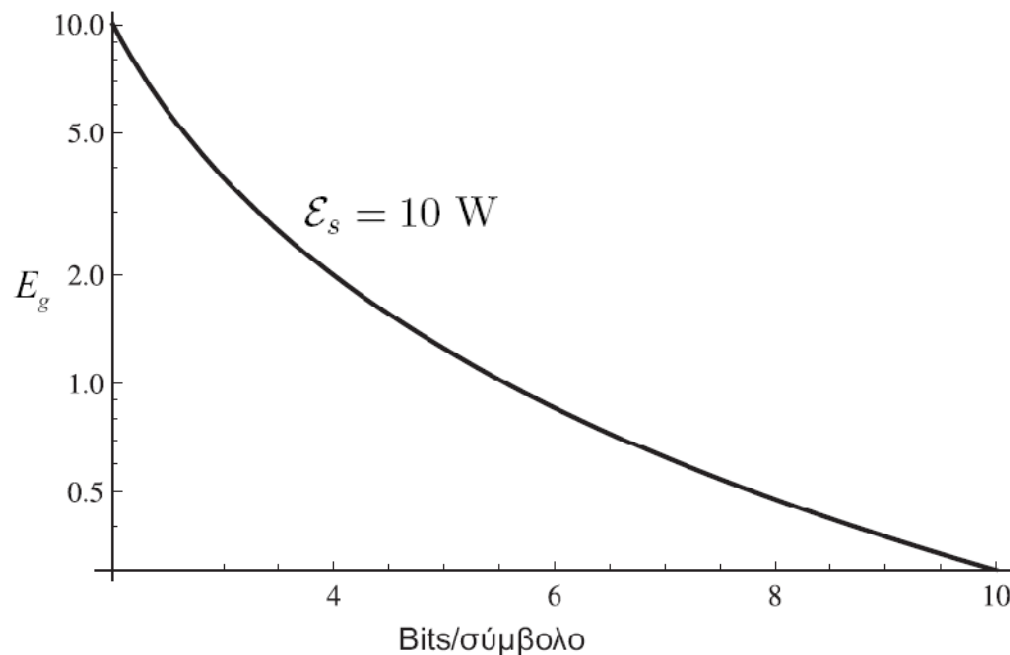
SNR= 0 dB



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Ενέργεια συμβόλου και bit, Ευκλείδεια Απόσταση

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathcal{E}_{s_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[(2i - M - 1) \sqrt{\mathcal{E}_g} \right]^2 = \frac{\mathcal{E}_g (M^2 - 1)}{3} \implies \mathcal{E}_g = \frac{3\mathcal{E}_s}{M^2 - 1}$$

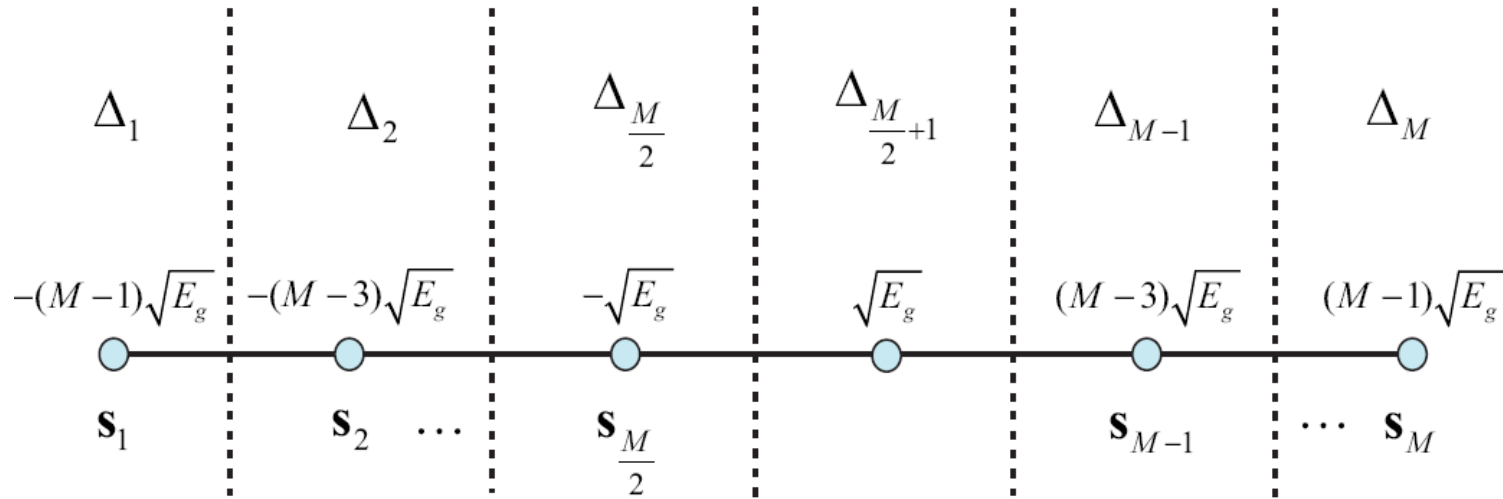


$$d_{\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j} = \sqrt{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|^2} = 2\|i - j\| \sqrt{\mathcal{E}_g}$$

$$j = i \pm 1 \text{ με } 1 \leq j \leq M$$

$$d_{\min} = \sqrt{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i \pm 1}\|^2} = 2\sqrt{\mathcal{E}_g}$$

Αποδιαμόρφωση-Ανίχνευση



$$\Delta_1 : \{r < -(M-2)\sqrt{E_g}\}$$

$$\Delta_2 : \{-(M-2)\sqrt{E_g} \leq r \leq -(M-4)\sqrt{E_g}\}$$

\vdots

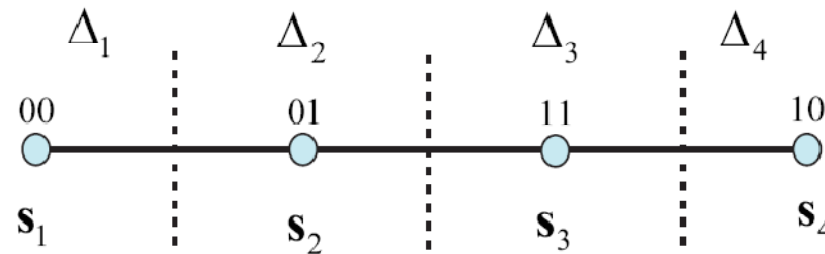
$$\Delta_{M-1} : \{(M-4)\sqrt{E_g} \leq r \leq (M-2)\sqrt{E_g}\}$$

$$\Delta_M : \{(M-2)\sqrt{E_g} < r\}$$

Αποδιαμόρφωση-Ανίχνευση

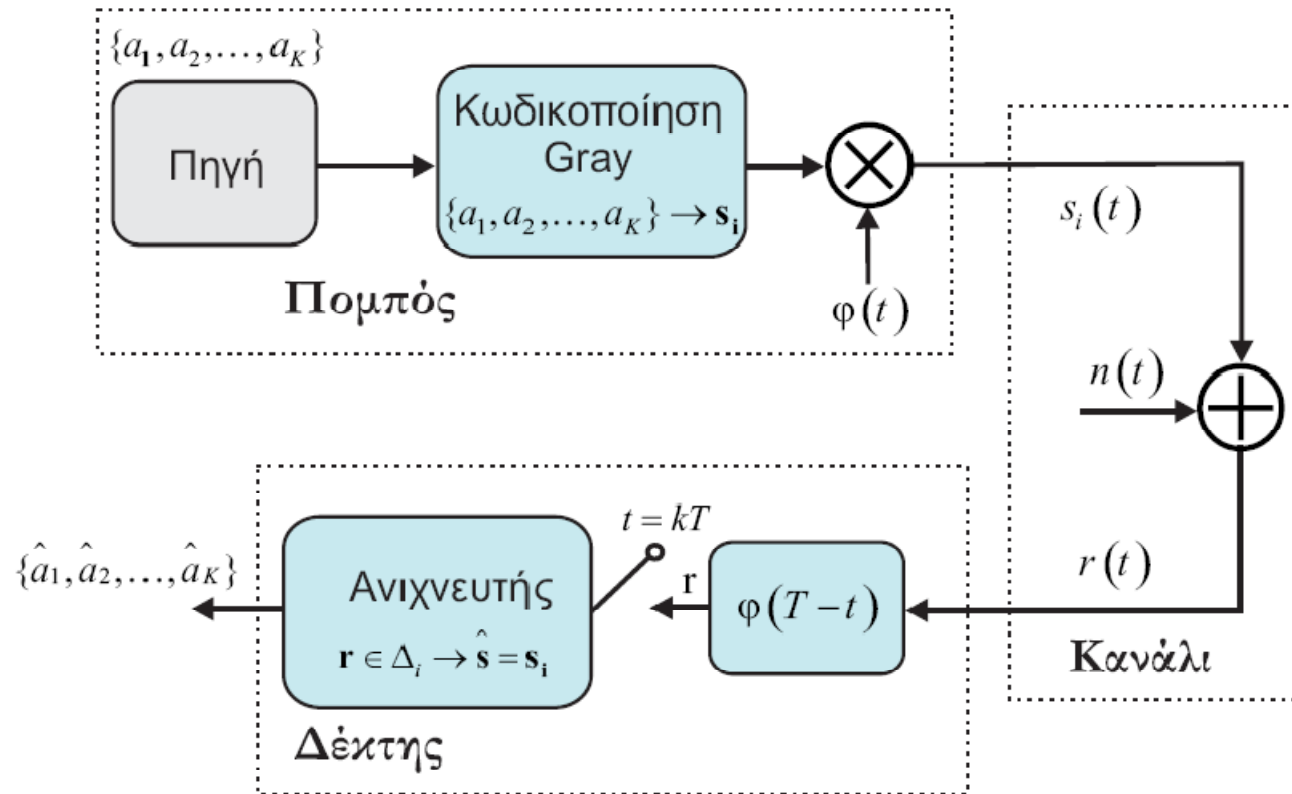
Καθορίστε τα όρια απόφασης για δέκτη 4-PAM με MLD που χρησιμοποιεί το βασικό παλμό $g(t) = A$ με διάρκεια T και αντιστοίχιση Gray.

$$\mathcal{E}_g = A^2 T$$

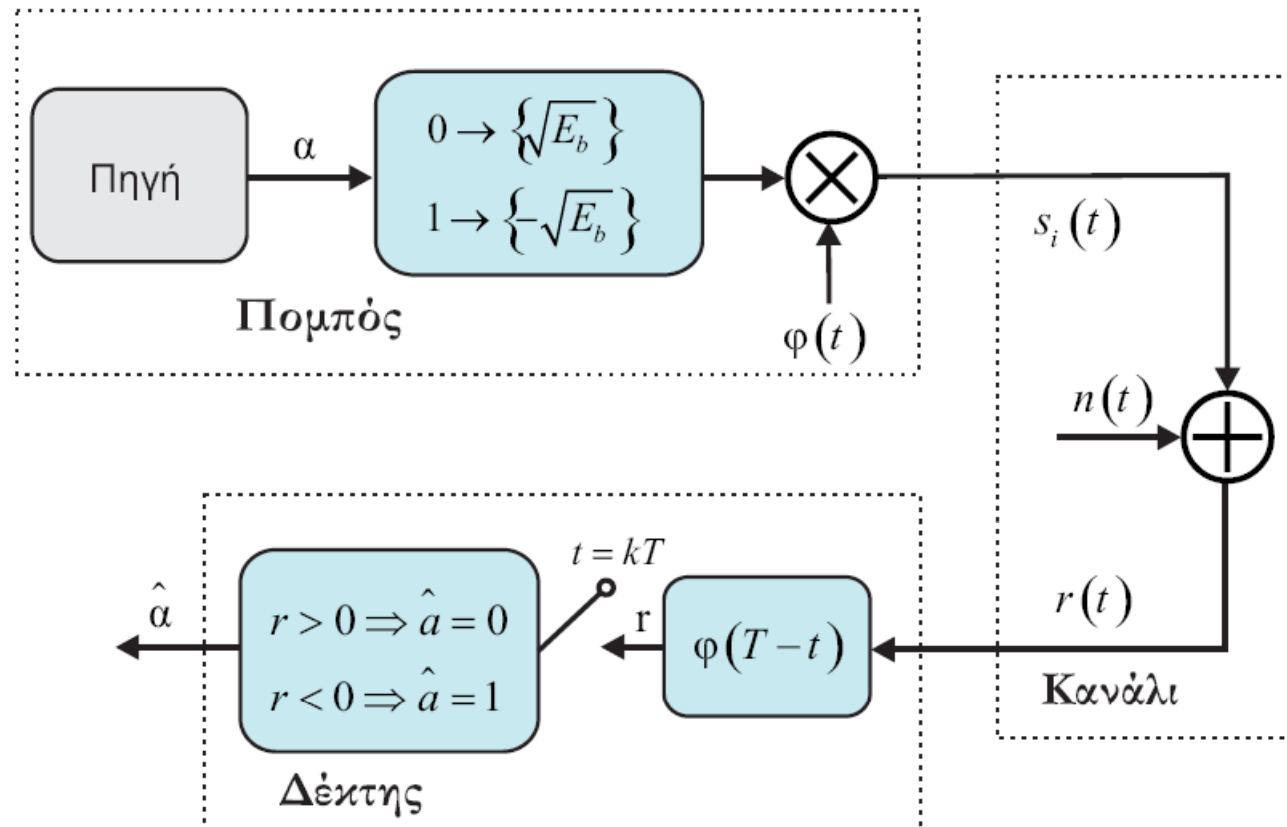


$$\begin{aligned} \Delta_1 &: r < -2\sqrt{\mathcal{E}_g} \\ \Delta_2 &: -2\sqrt{\mathcal{E}_g} < r < 0 \\ \Delta_3 &: 0 < r < 2\sqrt{\mathcal{E}_g} \\ \Delta_4 &: 2\sqrt{\mathcal{E}_g} < r. \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \hat{s} = s_i \rightarrow \begin{cases} \{00\}, & r \in \Delta_1 \\ \{01\}, & r \in \Delta_2 \\ \{11\}, & r \in \Delta_3 \\ \{10\}, & r \in \Delta_4, \end{cases}$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Πομπός-Δέκτης



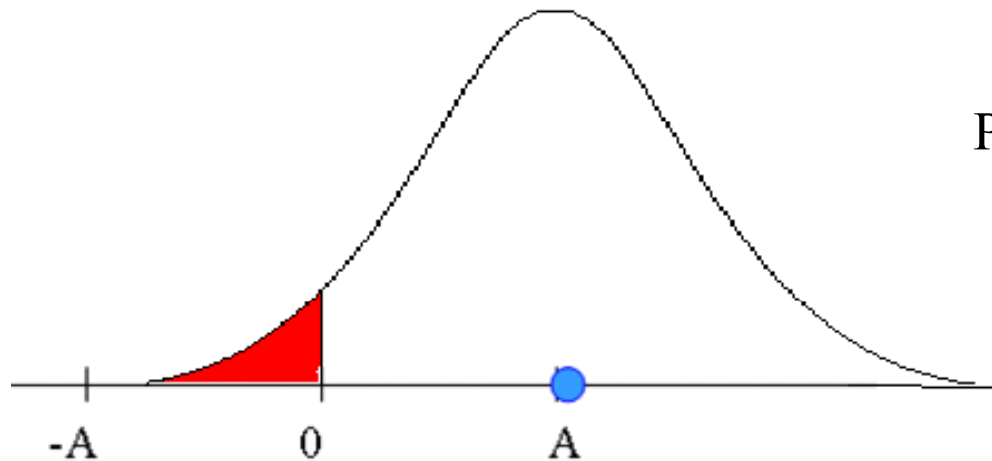
Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Πομπός-Δέκτης B-PSK



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

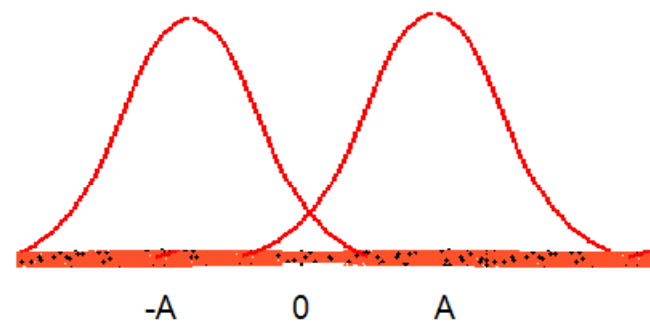
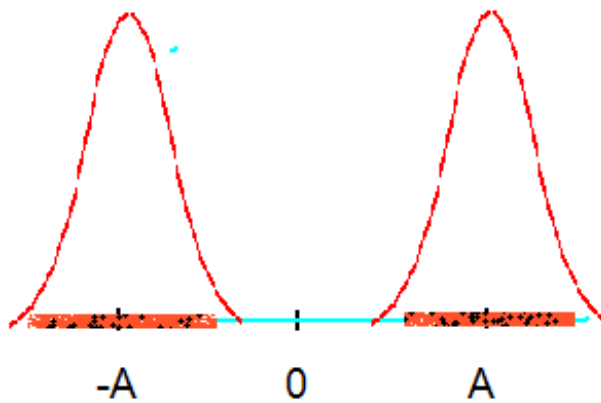
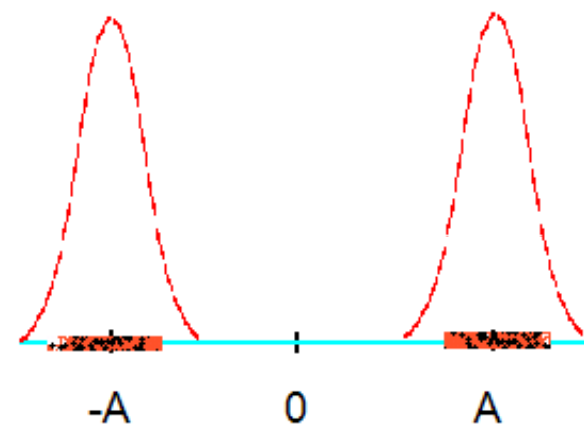
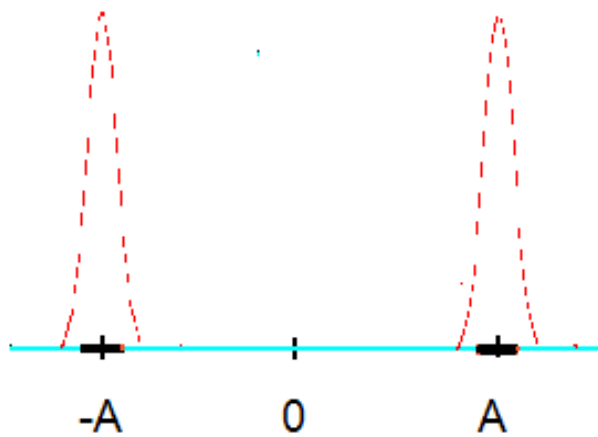
Μέση Πιθανότητα Σφάλματος B-PAM

Η πιθανότητα σφάλματος συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα το λαμβανόμενο σήμα να βρεθεί σε περιοχή εκτός της περιοχής απόφασης του εκπεμπόμενου σήματος. Με άλλα λόγια συνδέεται με την πιθανότητα κάποιες Τ.Μ με κανονική κατανομή να λάβουν κάποιες συγκεκριμένες τιμές.



$$\begin{aligned} \Pr_{error} &= \Pr \{x < 0\} \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} dx \end{aligned}$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Μέση Πιθανότητα Σφάλματος B-PSK



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Μέση Πιθανότητα Σφάλματος B-PAM

$$r = s_i + n \quad s_1 \rightarrow 0 \text{ και } s_2 \rightarrow 1$$

$$s_2 = \{\sqrt{\mathcal{E}_g}\}$$

$$P_{b|s_2} = \Pr(\hat{s} \neq s_2 | s_2) = \Pr(r < 0 | s_2) = \Pr(\sqrt{\mathcal{E}_g} + n < 0)$$

$$= \Pr(n < -\sqrt{\mathcal{E}_g}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\mathcal{E}_g}} \exp\left(-\frac{u^2}{N_0}\right) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}}\right).$$

$$s_1 = \{-\sqrt{\mathcal{E}_g}\}$$

$$P_{b|s_1} = \Pr(\hat{s} \neq s_1 | s_1) = \Pr(r > 0 | s_1) = \Pr(-\sqrt{\mathcal{E}_g} + n > 0)$$

$$= \Pr(n > \sqrt{\mathcal{E}_g}) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}}\right).$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Πιθανότητα Σφάλματος B-PAM

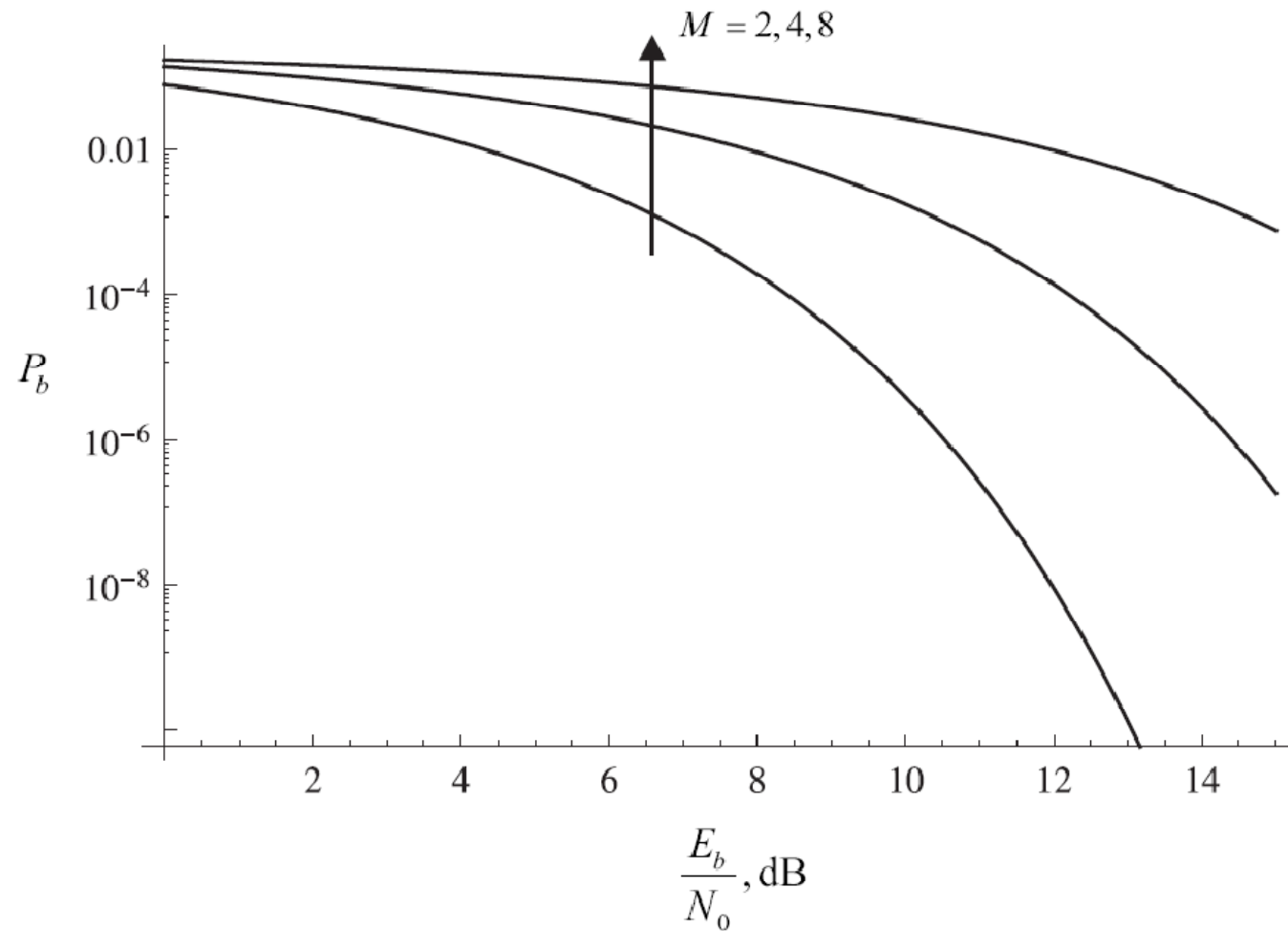
$$\begin{aligned} P_{b(BPAM)} &= P_{b|s_1} \Pr(s_1) + P_{b|s_2} \Pr(s_2) \\ &= \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}} \right) + \frac{1}{2} Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_g \quad \Rightarrow \quad P_{b(BPAM)} = Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right)$$

$$\begin{aligned} P_{s(MPAM)} &= \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}} \right) = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_s}{(M^2-1)N_0}} \right) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Gray, } >20 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad P_{b(MPAM)} \simeq \frac{P_s}{\log_2 M} = \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_b \log_2 M}{(M^2-1)N_0}} \right)$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Πιθανότητα Σφάλματος M -PAM



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

Παράδειγμα 7.5

Σε ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα BPSK το λαμβανόμενο σήμα είναι $r = s + n$, όπου s είναι το εκπεμπόμενο σύμβολο και n είναι Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση σ^2 . Αν η συγκεκριμένη διαμόρφωση χρησιμοποιεί τα ισοπίθανα σύμβολα $s_1 = \{-2\}$ και $s_2 = \{+2\}$ τότε η πιθανότητα σφάλματος του MLD είναι $P_{s,2} = 0.01$.

- i. Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου αν χρησιμοποιηθεί 3-PAM με τα ισοπίθανα σύμβολα $s_1 = \{-4\}$, $s_2 = \{0\}$ και $s_3 = \{+4\}$ ή 4-PAM με τα ισοπίθανα σύμβολα $s_1 = \{-4\}$, $s_2 = \{0\}$, $s_3 = \{+4\}$ και $s_4 = \{+8\}$.
- ii. Να υπολογιστούν οι ζητούμενες στο ερώτημα i πιθανότητες σφάλματος για τη περίπτωση AWGN με μοναδιαία μέση τιμή και ίδια διακύμανση.

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

Απάντηση

- ι. Αν μεταδίδεται ένα από δύο ισοπίθανα σύμβολα $s_1 = \{-2\}$ και $s_2 = \{+2\}$, η πιθανότητα σφάλματος του βέλτιστου δέκτη είναι $P_{s,2} = 0.01$. Έτσι θα ισχύει

$$P_{s,2} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.01. \quad (7.28)$$

Για την περίπτωση του 3-PAM θα ισχύει

$$P_{s,3} = \frac{1}{3}[P_{s,3|s_1} + P_{s,3|s_2} + P_{s,3|s_3}], \quad (7.29)$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

$$\begin{aligned} P_{s,3|s_1} &= P_{s,3|-4} = \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[-\frac{(r+4)^2}{2\sigma^2}\right]} dr \\ &= \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} dx = Q\left(\frac{2}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} P_{s,3|s_2} &= P_{s,3|0} = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]} dr + \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]} dr \\ &= 2 \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} dx = 2Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

και

$$\begin{aligned} P_{s,3|s_3} &= P_{s,3|+4} = \int_{-\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left[-\frac{(r-4)^2}{2\sigma^2}\right]} dr \\ &= \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} dx = Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

$$\begin{aligned} P_{s,3} &= \frac{1}{3} \left[Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + 2Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) \right] \\ &= \frac{4}{3} Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.0133. \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} P_{s,4} &= \frac{1}{4} [P_{s,4|s_1} + P_{s,4|s_2} + P_{s,4|s_3} + P_{s,4|s_4}] \\ &= \frac{1}{4} \left[Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + 2Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + 2Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) \right] \\ &= \frac{3}{2} Q\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.015. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

- ii. Στην περίπτωση που το σύστημα λειτουργεί σε περιβάλλον AWGN με μοναδιαία (αντί μηδενικής) μέση τιμή, τα αποτελέσματα δεν θα αλλάξουν αφού αυτό που θα συμβεί θα είναι η ολίσθηση των ορίων απόφασης κατά μία μονάδα.

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Πιθανότητα Σφάλματος M -PAM

Παράδειγμα 7.6

Σε ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα χρησιμοποιείται διαμόρφωση βασικής ζώνης M -PAM με κωδικοποίηση Gray. Εξαιτίας των περιορισμών του ενισχυτή η μέγιστη ισχύς εξόδου πρέπει να είναι μικρότερη από 1mW ενώ η πιθανότητα σφάλματος bit δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή 10^{-6} . Η διακύμανση του AWGN είναι $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} = 0.25 \mu\text{W}/\text{Hz}$.

- i) Να υπολογιστεί ο μέγιστος δυνατός ρυθμός μετάδοσης bits όταν $M = 2, 4, 8$.
- ii) Ποια από τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις απαιτεί τη μικρότερη ενέργεια ανά bit;

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

Απάντηση

i) Η μέγιστη ενέργεια (και συνεπώς η μέγιστη ισχύς) χρησιμοποιείται για τη μετάδοση των ακραίων σημείων του αστερισμού (βλέπε Σχήμα 7.2). Δηλαδή αυτών με συντεταγμένες $-(M-1)\sqrt{\mathcal{E}_g}$ και $(M-1)\sqrt{\mathcal{E}_g}$.

Η ενέργεια στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_g (|\pm(M-1)|)^2 = \mathcal{E}_g (M-1)^2. \quad (7.35)$$

Από τις (7.14) και (7.35) και αν T είναι η διάρκεια του συμβόλου προκύπτει

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{\max} \left[\frac{M^2 - 1}{3(M-1)^2} \right] \quad (7.36)$$

οπότε

$$\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_{\max} \left[\frac{M^2 - 1}{3(M-1)^2} \right], \quad (7.37)$$

όπου $\mathcal{P}_s = \frac{\mathcal{E}_s}{T}$ και $\mathcal{P}_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{T}$ είναι η μέση και η μέγιστη ισχύς συμβόλου αντίστοιχα.

Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος

Πιθανότητα Σφάλματος M-PAM

Από τις σχέσεις (6.122), (7.26) και (7.37) θα ισχύει για την πιθανότητα σφάλματος bit

$$\frac{P_s}{\log_2 M} \leq P_b \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{2P_{\max} T}{(M-1)^2 N_0}} \right) \leq 10^{-6}. \quad (7.38)$$

Από την (7.38) και μετά από πράξεις προκύπτει ότι όταν $M = 2$ τότε $T \geq 0.005649$ sec, οπότε ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης συμβόλων θα είναι

$$R_{(BPAM)} = \frac{1}{T} = 178 \text{ bps}. \quad (7.39)$$

Με τον ίδιο τρόπο για $M = 4$ θα είναι $T \geq 0.049607$ sec και επειδή $T = T_b \log_2 M$ λαμβάνεται

$$R_{(4-PAM)} = \frac{1}{T_b} = 41 \text{ bps}. \quad (7.40)$$

Όταν $M = 8$ θα είναι $T \geq 0.264181$ sec οπότε

$$R_{(8-PAM)} = \frac{1}{T_b} = 12 \text{ bps}. \quad (7.41)$$

Φασματική Ανάλυση M-PAM

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad \mathbf{a} = \{a_n\}$$

$$S(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G(f)|^2$$

όπου $G(f)$ είναι ο Μ/Σ Fourier του $g(t)$ (απόκριση συχνότητας του φίλτρου εκπομπής) και $S_a(f)$ είναι η ΦΠΙ της ακολουθίας πλατών \mathbf{a} .

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi f m T}$$

$R_a(j)$ τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ακολουθίας \mathbf{a} .

- Η ΦΠΙ του $s(t)$ εξαρτάται από τα φασματικά χαρακτηριστικά τόσο του βασικού παλμού $g(t)$ όσο και από τα αντίστοιχα της ακολουθίας \mathbf{a} .
- Με κατάλληλο σχεδιασμό των $G(f)$ και $S_a(f)$ μπορεί να διαμορφωθεί το φάσμα του σήματος M-PAM.

Φασματική Ανάλυση M-PAM

Αποδεικνύεται ότι αν τα πλάτη στην ακολουθία a είναι ασυσχέτιστα με μέση τιμή μ_a και διακύμανση σ_a τότε η ΦΠ του $s(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$S(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

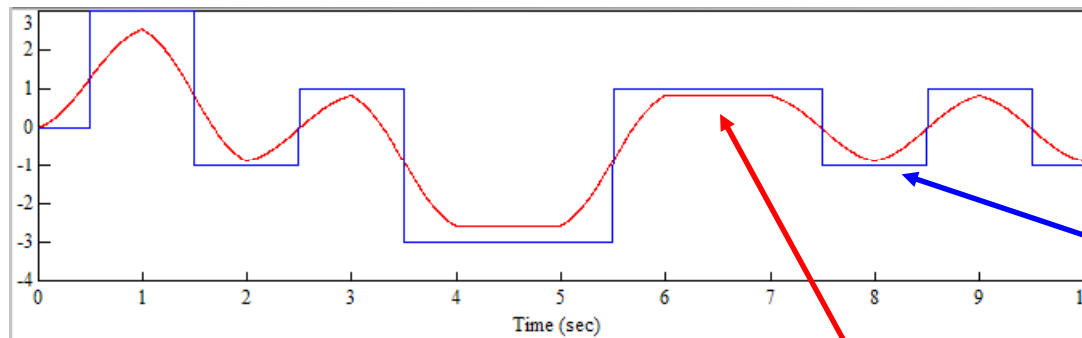
Συνεχές φάσμα

Διακριτές
συνιστώσες που
απέχουν $1/T$

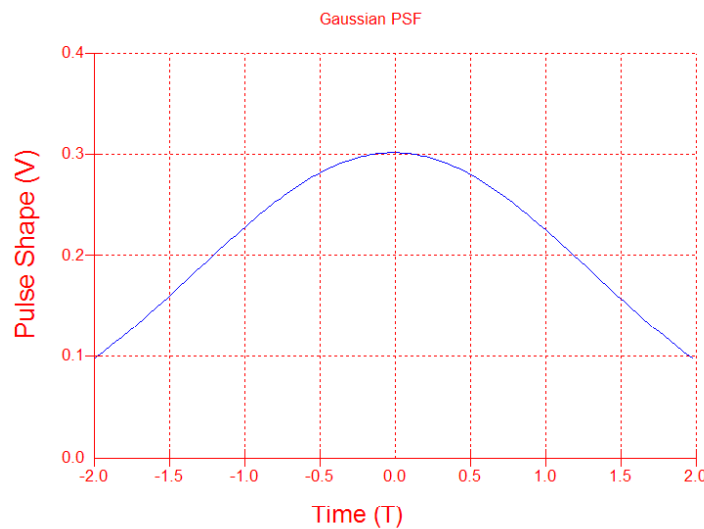


- Πρόβλημα
- Απομακρύνονται αν...

Φασματική Ανάλυση M-PAM



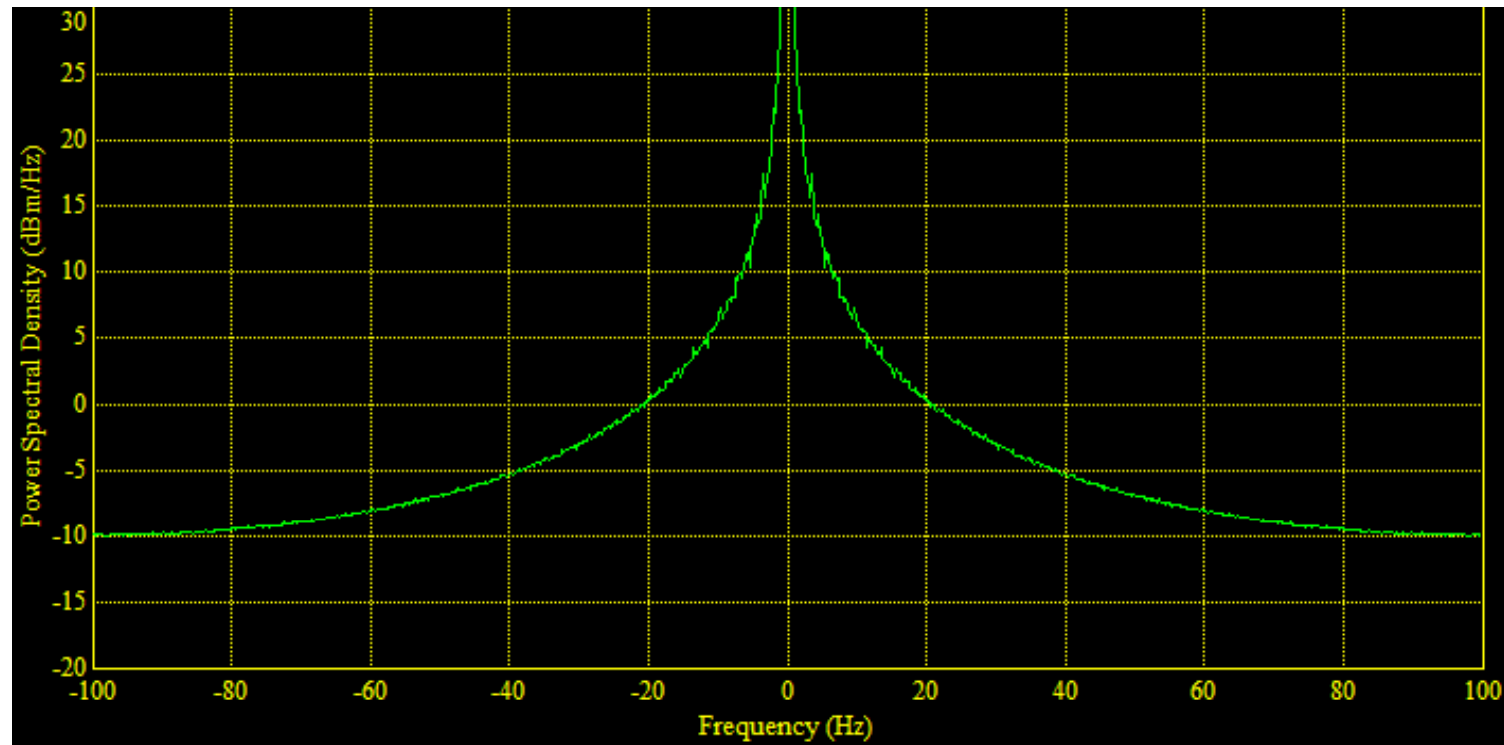
Σύμβολα (a_k):
Ορθογώνιοι παλμοί με
πλάτη -1, -3, +1, +3



Μεταδιδόμενοι παλμοί βασικής ζώνης. Η
έξοδος του φίλτρου $g(t)$ όταν οι εισοδοί είναι
τα σύμβολα a_k

Η απόκριση του φίλτρου $g(t)$

Φασματική Ανάλυση M-PAM



Φασματική Ανάλυση *M*-PAM

Παράδειγμα 7.7

Έστω $\mathbf{a} = \{a_n\}$ μία δυαδική ακολουθία συμβόλων αποτελούμενη από σήματα με πλάτη $A = \pm 1$, τα οποία έχουν μέση τιμή $\mu_a = 0$ και διακύμανση $\sigma_a = 1$. Αν η ακολουθία πλατών $\mathbf{b} = \{b_n\}$ δημιουργείται από τη σχέση

$$b_n = a_n + a_{n-1}, \quad (7.49)$$

να βρεθεί μία έκφραση για τη ΦΠ του σήματος *M*-PAM.

Φασματική Ανάλυση M-PAM

Απάντηση

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ακολουθίας \mathbf{b} θα είναι

$$\begin{aligned} R_b(m) &= \mathbb{E}[b_n b_{n+m}] \\ &= \mathbb{E}[(a_n + a_{n-1})(a_{n+m} + a_{n+m-1})] = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m = \pm 1 \\ 0, & \text{άλλο} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.50)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση η (7.47) γίνεται

$$S_b(f) = 2(1 + \cos 2\pi fT) = \cos^2 \pi fT \quad (7.51)$$

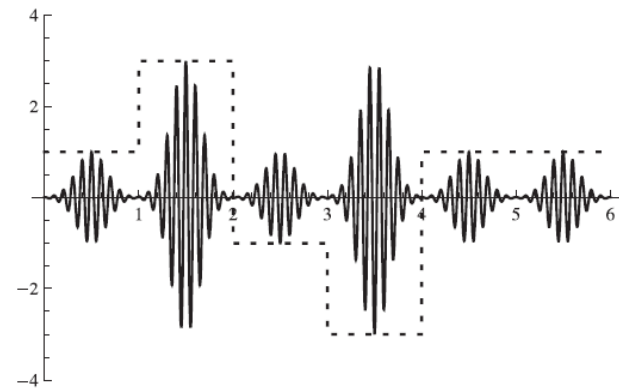
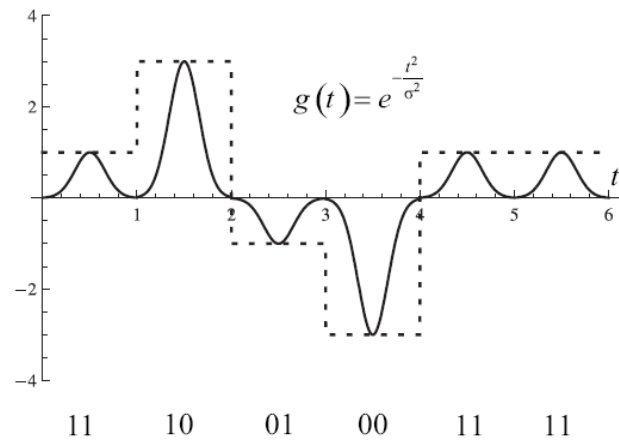
οπότε η ζητούμενη έκφραση για τη ΦΠΠ του $s(t)$ θα είναι

$$S(f) = \frac{4}{T} |G(f)|^2 \cos^2 \pi fT. \quad (7.52)$$

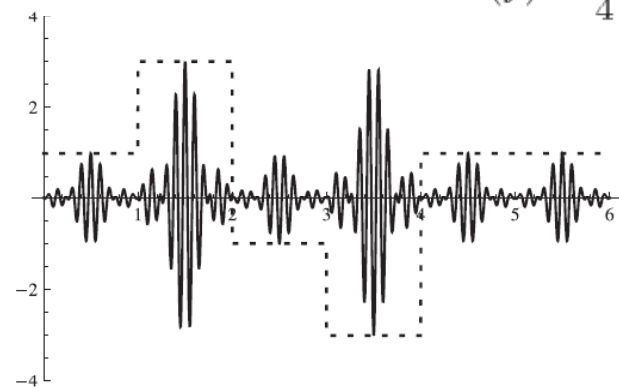
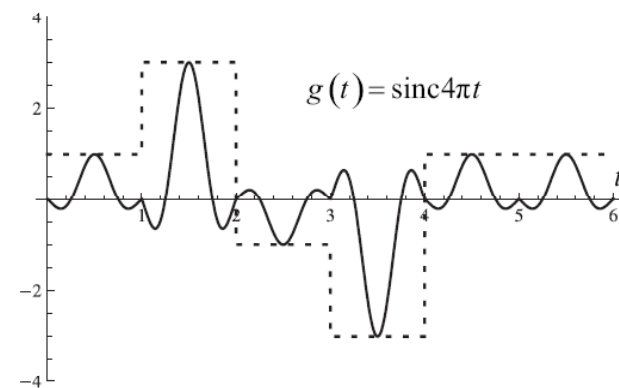
Από την (7.52) προκύπτει το συμπέρασμα ότι το φάσμα του εκπεμπόμενου σήματος $s(t)$ μπορεί επίσης να διαμορφωθεί αν η ακολουθία πλατών στο διαμορφωτή είναι συσχετισμένη.

Ζωνοπερατό M-PAM

$$v_i(t) = \begin{cases} (2i - M - 1)g(t) \cos 2\pi f_c t, & t \in [0, T] \\ 0, & \text{αλλοού} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, M \quad \phi(t) = \frac{g(t) \cos 2\pi f_c t}{\sqrt{\mathcal{E}_g}}$$

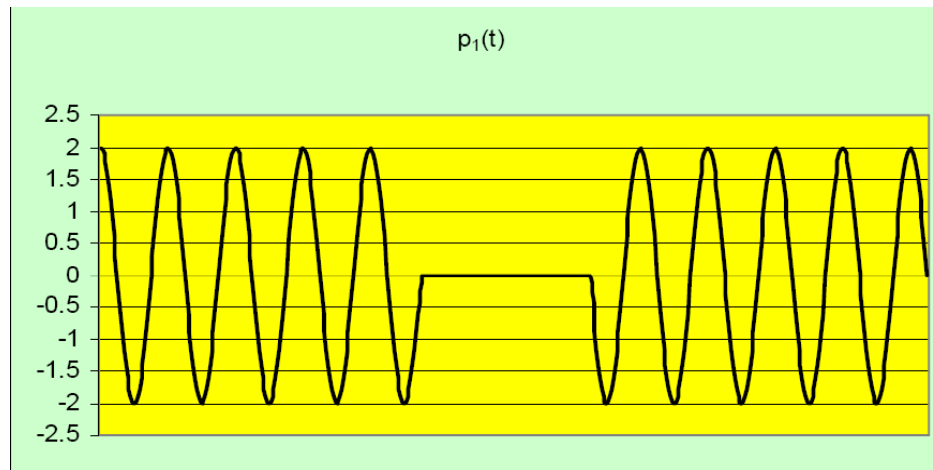
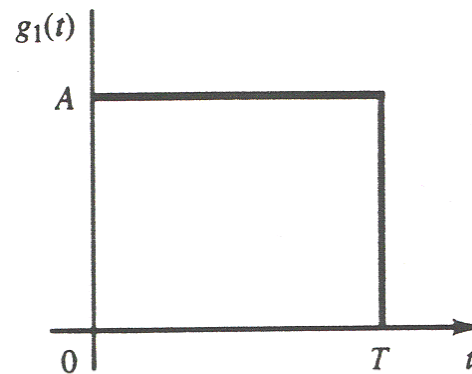


$$U(f) = \frac{1}{4}[S(f - f_c) + S(f + f_c)]$$



Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος Amplitude Shift Keying-ASK

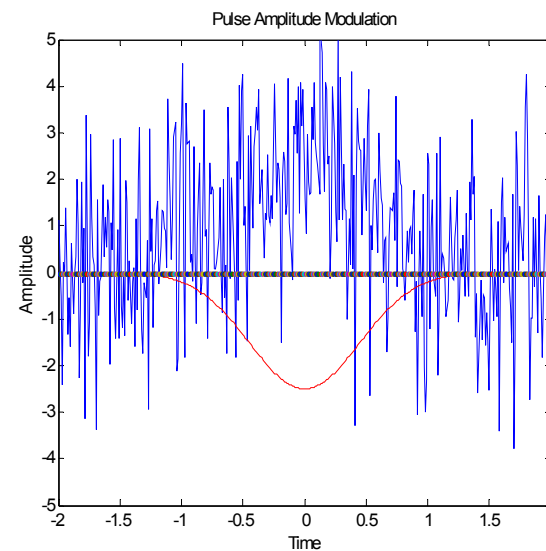
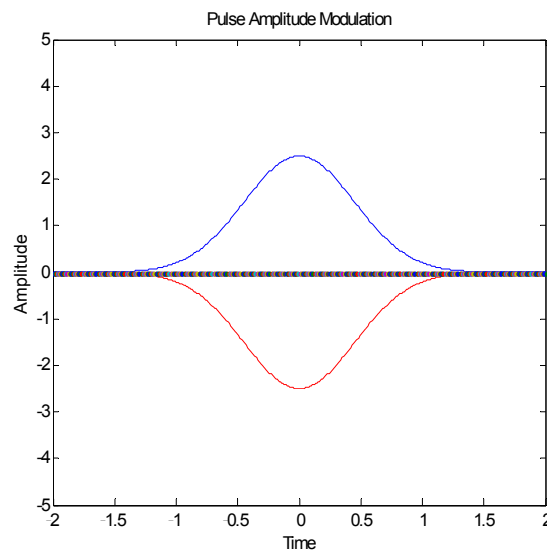
Ορθογώνιος παλμός



On-Off Keying, OOK

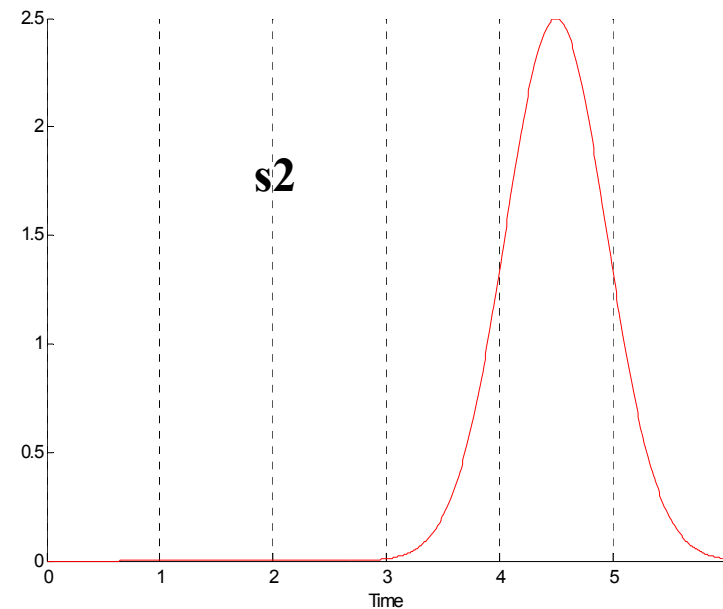
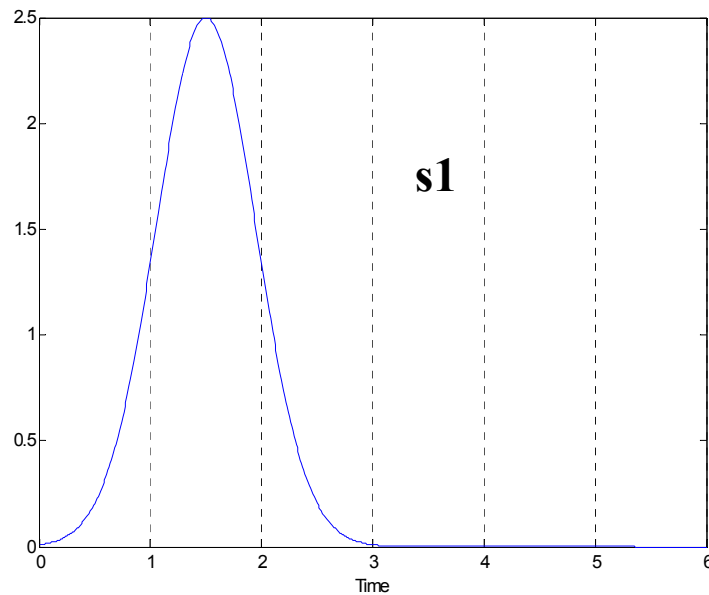
Δισδιάστατες Διαμορφώσεις

- ✓ Με τη διαμόρφωση PAM εκπέμπονται σύμβολα που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς ένα μόνο χαρακτηριστικό (ένας βαθμός ελευθερίας), το πλάτος κάποιων παλμών. Για το λόγο αυτό και αποτελεί διαμόρφωση μιας διάστασης.
- ✓ Επομένως, η ανίχνευση ενός συμβόλου στο δέκτη θα βασίζεται αποκλειστικά στη σωστή ανίχνευση αυτού του μοναδικού χαρακτηριστικού (του πλάτους του σήματος).



Δισδιάστατες Διαμορφώσεις

Η πιθανότητα σωστής ανίχνευσης ενός συμβόλου θα αυξάνονταν αν η ανίχνευση βασίζονταν σε περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά (βαθμοί ελευθερίας).



Για παράδειγμα, αν η ανίχνευση του συμβόλου βασίζονταν:

- i) Στο πλάτος του παλμού στην πρώτη ημιπερίοδο
- ii) Στο πλάτος του παλμού στη δεύτερη ημιπερίοδο

Διαμορφώσεις - Δισδιάστατες Κυματομορφές

Αν η ανίχνευση του συμβόλου βασίζονταν:

- i) Στο πλάτος ενός ημιτόνου
- ii) Στο πλάτος ενός συνημιτόνου

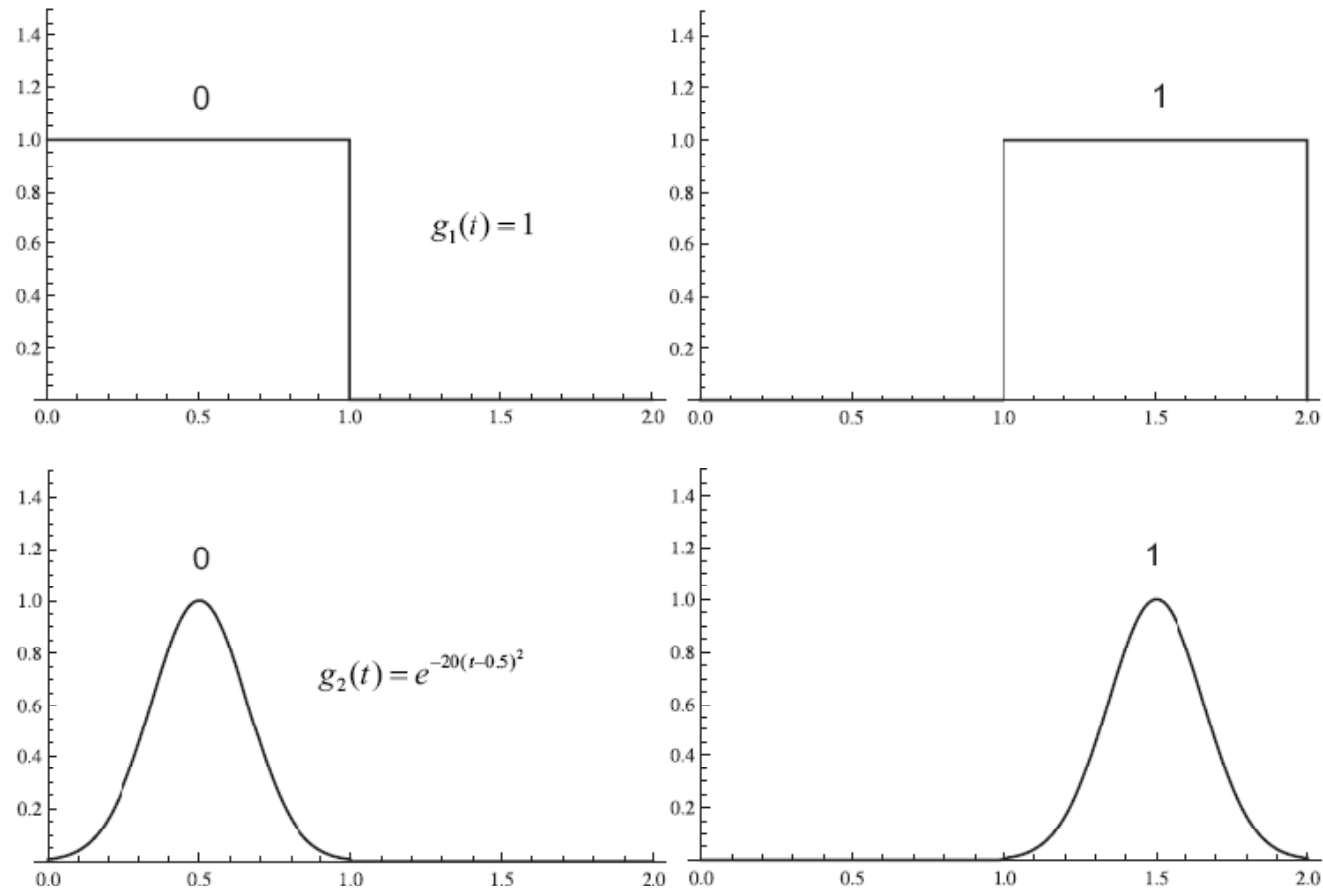
Σύμβολο $s_1 \rightarrow$ περιμένω να λάβω ένα ημίτονο με πλάτος A_1 και ένα συνημίτονο με πλάτος A_2

Σύμβολο $s_2 \rightarrow$ περιμένω να λάβω ένα ημίτονο με πλάτος B_1 και ένα συνημίτονο με πλάτος B_2

Άρα υπάρχουν δύο δυνατότητες ελέγχου για σωστή ανίχνευση.

Διαμόρφωση θέσης παλμού Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

$$s_1(t) = g(t) \text{ και } s_2(t) = g(t - \frac{T}{2}), t \in [0, T]$$



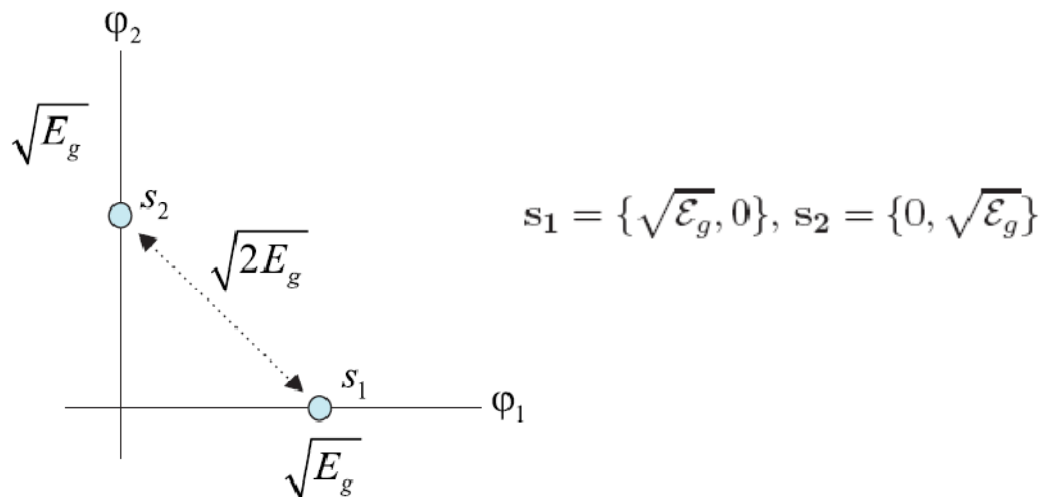
Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

Αστερισμός

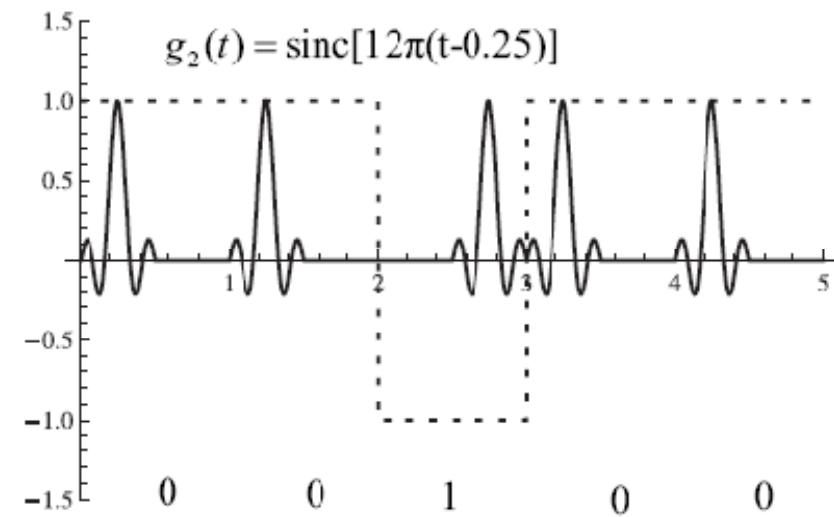
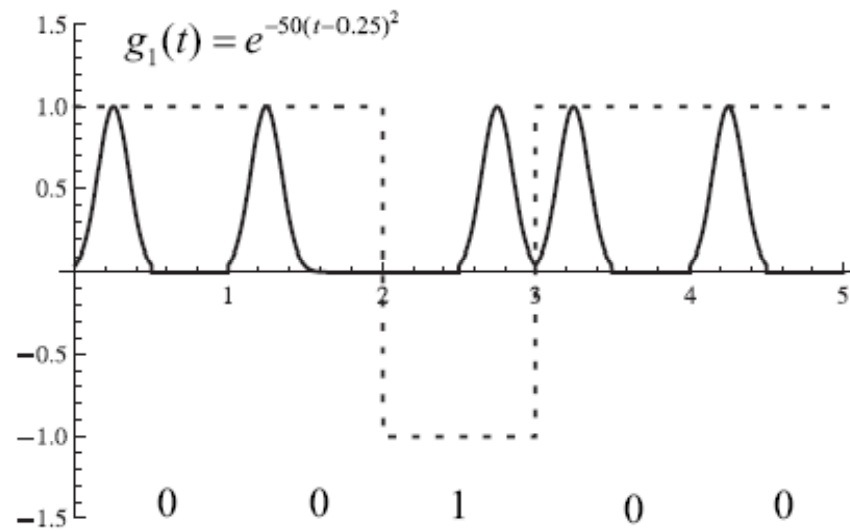
$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = \int_0^{\frac{T}{2}} g(t)g(t - \frac{T}{2})dt + \int_{\frac{T}{2}}^T g(t)g(t - \frac{T}{2})dt = 0$$

$$\mathcal{E}_g = \int_0^T |s_1(t)|^2 dt = \int_0^T |s_2(t)|^2 dt \implies \mathcal{E}_g = A^2 \frac{T}{2}$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_g}} \text{ και } \phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_g}} \implies \begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{\mathcal{E}_g} \times \phi_1(t) + 0 \times \phi_2(t) \\ s_2(t) &= 0 \times \phi_1(t) + \sqrt{\mathcal{E}_g} \times \phi_2(t) \end{aligned}$$



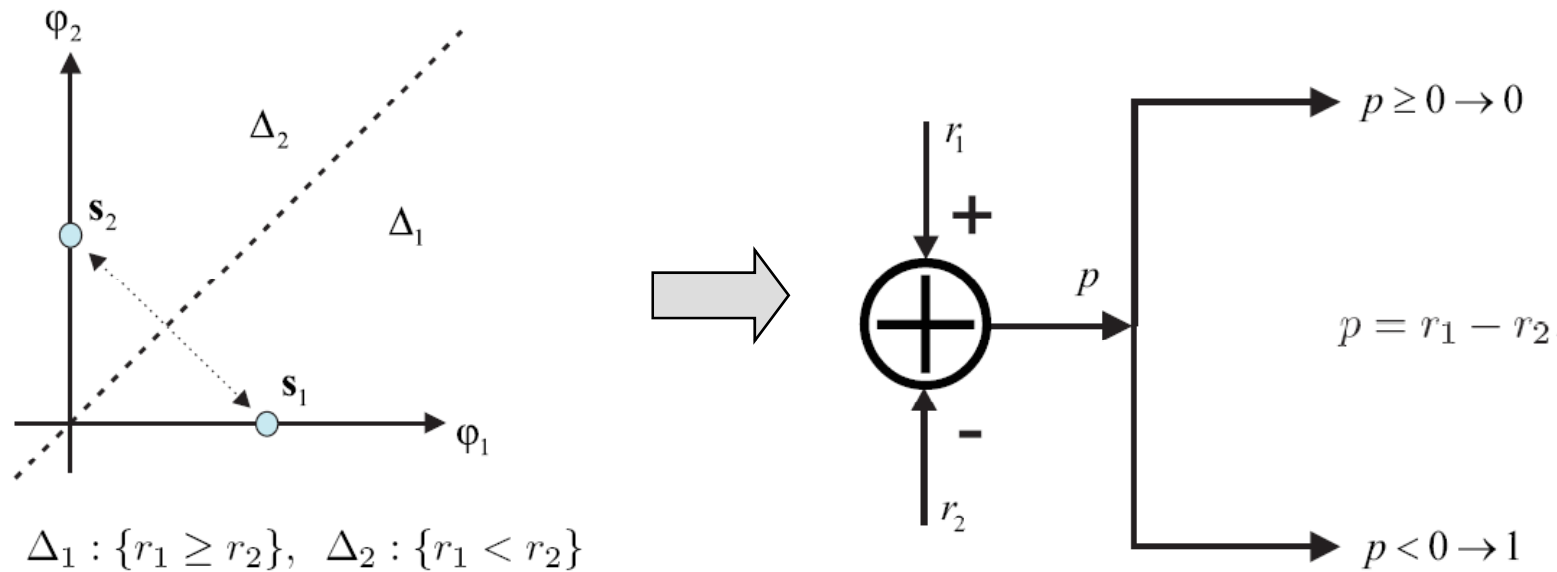
Binary Pulse Position Modulation (BPPM)



Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

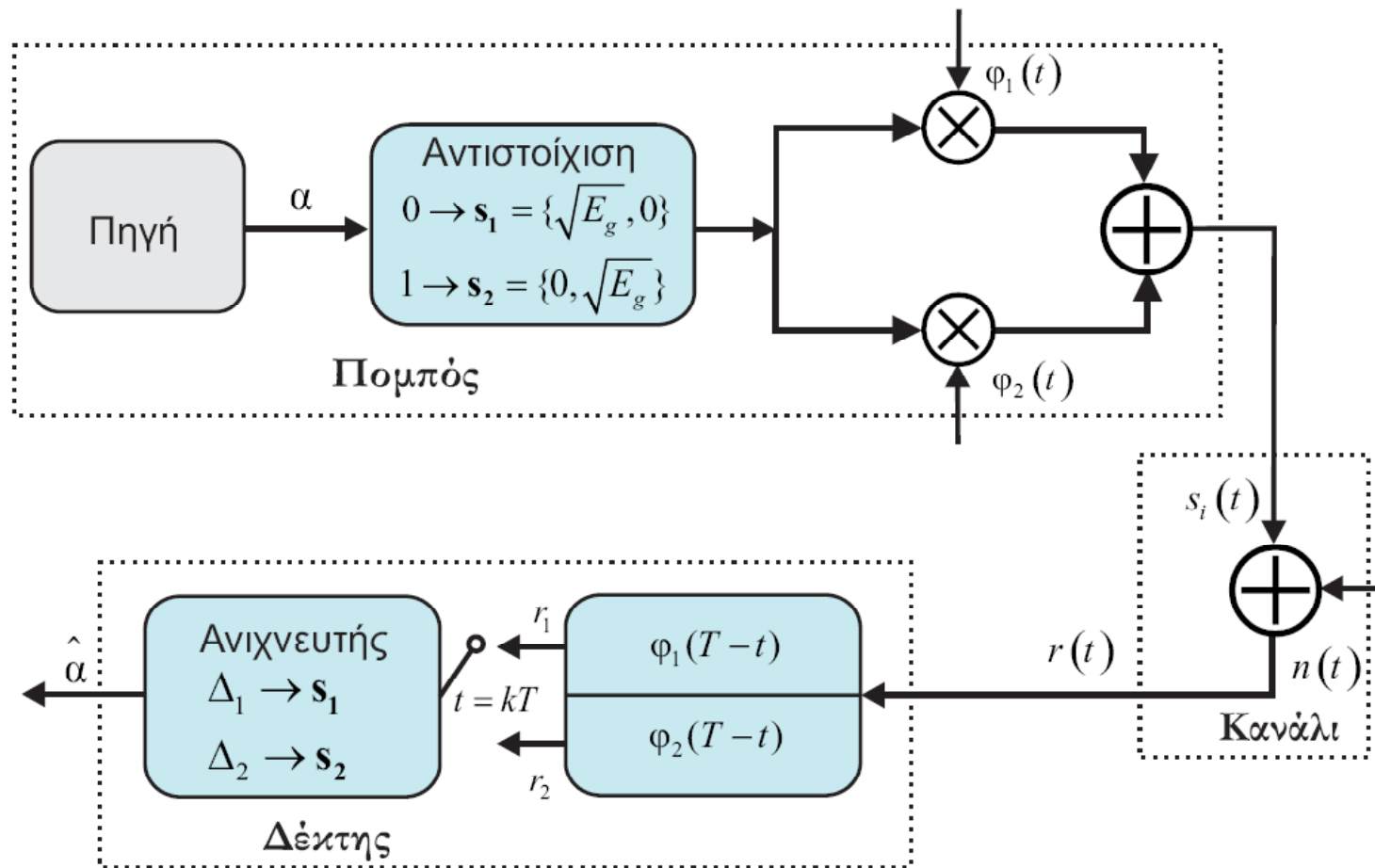
Αποδιαμόρφωση-Ανίχνευση

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n} \quad \mathbf{s}_i = \{s_{i1}, s_{i2}\}, \quad \mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$$



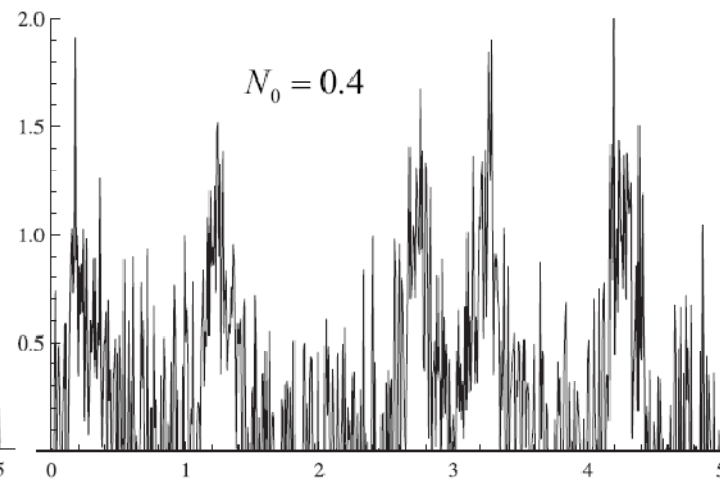
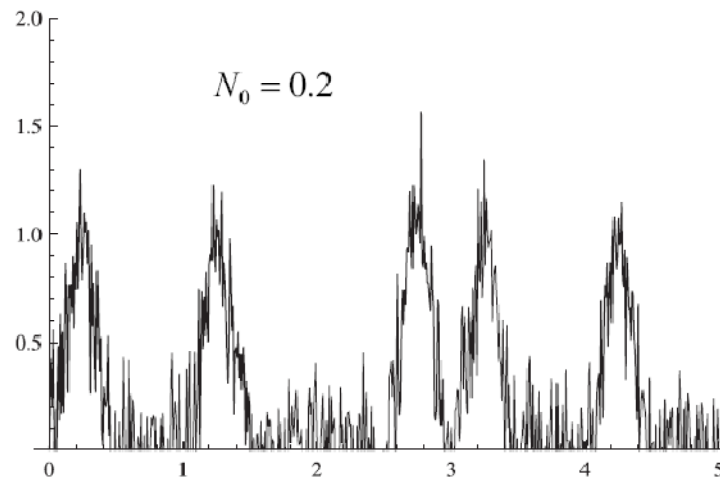
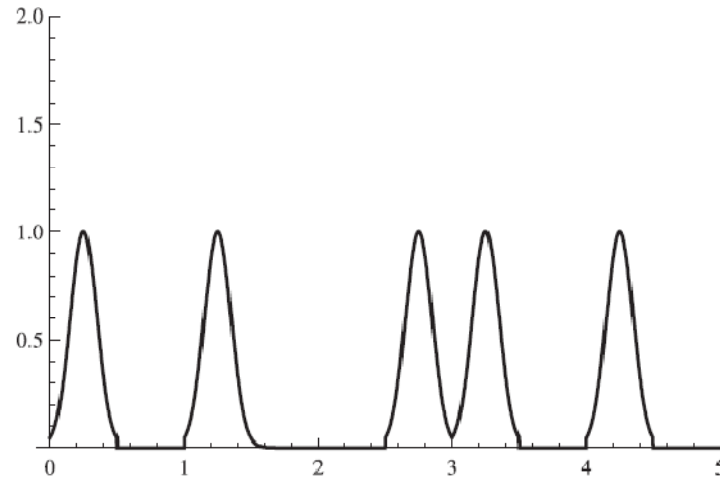
Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

Πομπός-Δέκτης



Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

Πιθανότητα Σφάλματος



Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

Πιθανότητα Σφάλματος

$$s_1 \rightarrow 0 \text{ και } s_2 \rightarrow 1 \quad \mathbf{s}_1 = \{\sqrt{\mathcal{E}_g}, 0\}$$

$$\mathbf{r} = \{r_1, r_2\} = \{\sqrt{\mathcal{E}_g} + n_1, n_2\}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}_1 | \mathbf{s}_1) &= \Pr(r_2 > r_1 | \mathbf{s}_1) = \Pr(n_2 > \sqrt{\mathcal{E}_g} + n_1) \\ &= \Pr(n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_g}) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{N_0}}\right). \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = N_0/2 + N_0/2 = N_0.$$

$$\mathbf{s}_2 = \{\sqrt{0}, \mathcal{E}_g\}$$

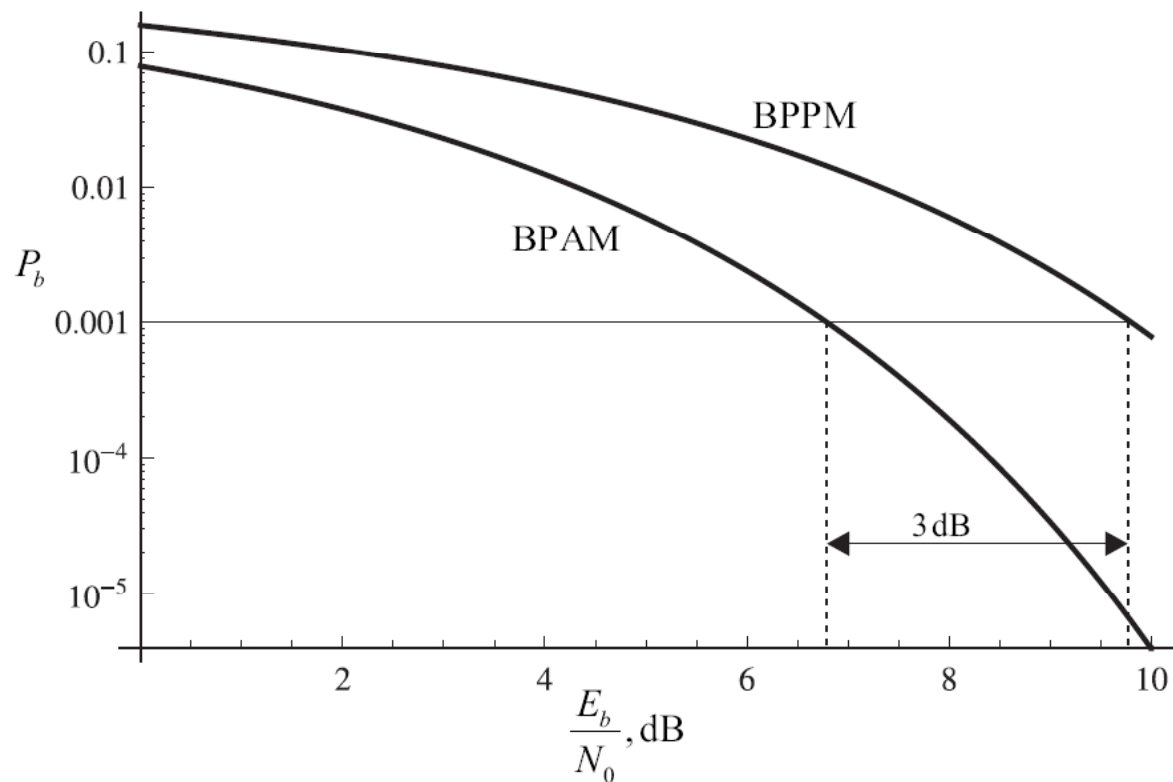
$$\Pr(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}_2 | \mathbf{s}_2) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{N_0}}\right)$$

$$\mathcal{E}_g = \mathcal{E}_b \implies P_{b(BPPM)} = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Binary Pulse Position Modulation (BPPM)

Πιθανότητα Σφάλματος

$$P_{b(BPPM)} = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right), \quad P_{b(BPAM)} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$



Pulse Position Modulation

Εφαρμογές

- Ασύρματος έλεγχος μοντέλων-παιχνιδιών αεροπλάνων, πλοίων και αυτοκινήτων. Η χρησιμοποίηση PPM σε αυτού του είδους τις εφαρμογές οφείλεται στην εύκολη ανίχνευση των συμβόλων στο δέκτη, κάτι που έχει σαν συνέπεια τη χρήση δεκτών πολύ μικρού μεγέθους και χαμηλής πολυπλοκότητας.
- Ανάγνωση έξυπνων καρτών από απόσταση, σύμφωνα με το πρότυπο ISO 15693. Το σύστημα λειτουργεί σε συχνότητα 13.56 MHz και μπορεί να αναγνώσει κάρτες από απόσταση 1-1.5 μ.
- Σε συστήματα ασύρματης επικοινωνίας υπερ-ευρείας (ultra wide-band) ζώνης (IEEE P802.15 TG3a).
- Σε συστήματα ασύρματων οπτικών δικτύων εσωτερικών χώρων, με υπέρυθρη ακτινοβολία (IEEE 802.11 Wireless Access Method and Physical Layer Specification).
- Σε συστήματα οπτικής επικοινωνίας μεταξύ δορυφόρων (Optical Inter-orbit Communications Engineering Test Satellite-OICETS).
- Σε επικοινωνίες διαστημικών αποστολών (deep-space communications).