Επαγωγή

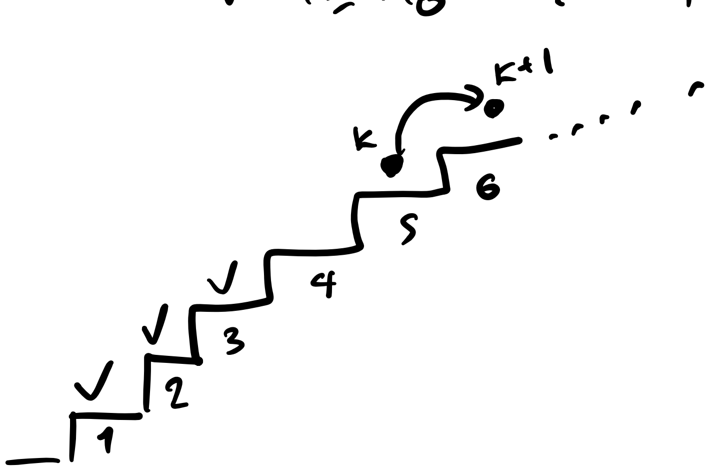
$\forall\, n \geq n_0 : P(n)$ αποδειξη αυτής της μορφής

Αρκει να δειξουμε ότι

- Βαση επαγωγής: $P(n_0)$
- Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι ισχύει για $n = k$
- Επαγωγικό βήμα: Δείχνω ότι ισχύει για $n = k+1$

$$P(n_0) \wedge \left(\forall\, n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)\right)$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0 : P(n)$$



Παράδειγμα 1

Ν.δ.ο. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Απόδειξη $P(n)$ είναι η πρόταση

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Θα δείξω ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$ με επαγωγή στο n.

Βάση: $n=1$ $P(1)$ $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

Επαγ. υπόθεση: Έστω ότι ισχύει η $P(k)$

Επαγ βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}_{\|\ \text{(από επαγ υπόθεση)}} + (k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

Άρα αρκεί να δείξω ότι

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

που ισχύει ✓

άρα ισχύει η $P(k+1)$

Επομένως ισχύει $P(n)$ για κάθε $n \geq 1$ □

✓ ✓ ✓ ✓

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \vdots$$

$$k \to k+1$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε και να αποδείξετε με επαγωγή κλειστό τύπο για το άθροισμα

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n-1)$$

Απόδειξη

Για $n=1$ $\quad 1 = 1$

$n=2$ $\quad 4 = 1+3$

$n=3$ $\quad 9 = 1+3+5$

$n=4$ $\quad 16 = 1+3+5+7$

$n=5$ $\quad 25 = 1+3+5+7+9$

Έστω $P(n) \equiv$ "$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$"

Θα την αποδείξω με επαγωγή

Βάση Επαγωγής : $P(1), P(2), \dots, P(5)$ ✓

Επαγ. Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει η $P(n)$ για $n=k$

Επαγ. Βήμα : Θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

Ξέρω ότι $P(n)$ ισχύει για $n=k$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

Αν προσθέσω $(2k+1)$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)} + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

Άρα ισχύει η $P(k+1)$ $\square$

Παράδειγμα 3

Ν.δ.ο. $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Βάση : $n=1$: $1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓

Ε.Υ. : Έστω ότι ισχύει για $n=k$

Ε. Βήμα : Δείχνω ότι ισχύει για $n=k+1$

Θέλω να δείξω

$$\underbrace{1+2+\dots+2^{k-1}}_{\substack{\| \text{ από Ε.Υ.} \\ 2^k-1}} + 2^k \overset{?}{=} 2^{k+1}-1$$

Άρα θέλω να δείξω ότι

$$2^k-1+2^k \overset{?}{=} 2^{k+1}-1$$

$$\| \quad 2\,2^k - 1$$

$$\| \quad 2^{k+1} - 1$$

$\square$

Γενικότερα $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a r^i = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

Παράδειγμα 4: Ν.δ.ο $n < 2^n$ για κάθε θετικό ακέραιο

Απόδειξη

Βάση: Για $n=1$ $\quad 1 < 2^1 = 2$ ✓

Επαγ. Υποθ: Έστω ότι ισχύει για $n=k$

Επαγ. Βήμα: Θ.δ.ο ισχύει για $n=k+1$

δηλ. $\underbrace{k+1 < 2^{k+1}}$ ζητούμενο

Ξέρω ότι $k < 2^k$

$$k+1 < 2^k + 1$$

$$\le 2^k + 2^k \quad \text{γιατί } 2^k \geq 1 \text{ αν } k \geq 0$$

$$= 2^{k+1} \quad ✓$$

Παράδειγμα

Έστω $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$

αρμονικοί αριθμοί

$H_m \simeq \log m$ $\qquad H_m = \Theta(\log m)$

$m = 2^n$

– Ν.δ.ο. $\boxed{H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}}$

Απόδειξη Βάση $\begin{cases} n = 0 & H_{2^0} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2} \\ n = 1 & H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2} \end{cases}$

Επαγ. Υπόθεση : Έστω $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ για $n = k$

Επαγ. Βήμα : Θ.δ.ο. $H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$

$$H_{2^{k+1}} = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k}}^{\geq 1 + \frac{k}{2} \text{ από επαγ. υπόθεση}} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + 2^k \frac{1}{2^{k+1}} \quad \geq 1/2$$

$$= 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$$

$\square$

- Ν.δ.ο. $\boxed{H_{2^n} \leq 1 + n}$

Βάση

$n = 0 \qquad 1 \leq 1$

$n = 1 \qquad 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + 1$

Ε.Υ. Έστω ότι $H_{2^k} \leq 1 + k$

Ε.Β. Θ.δ.ο. $H_{2^{k+1}} \leq 1 + (k+1)$

$$H_{2^{k+1}} = \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k}}^{H_{2^k} \leq 1+k \text{ από επαγ. υπόθεση}} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

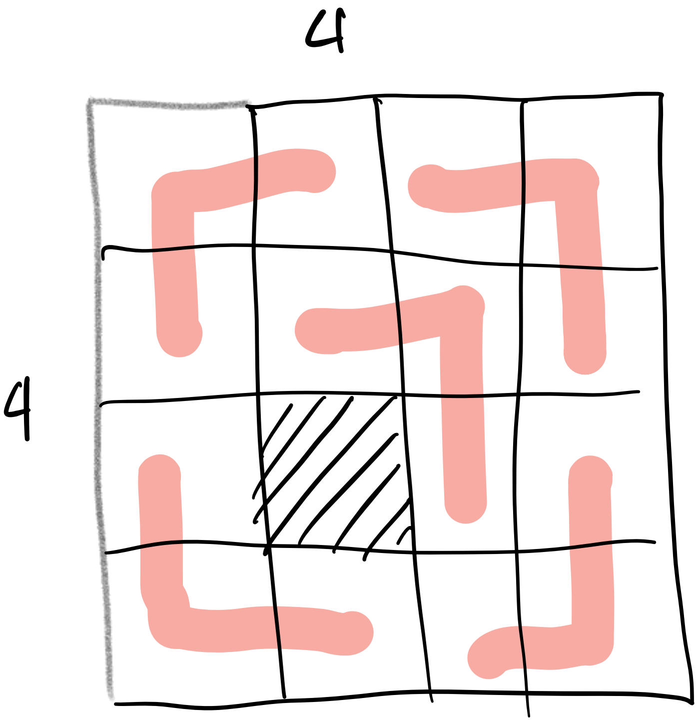
$\in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\leq 1 + k + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}$$

$$\leq 1 + k + 2^k \frac{1}{2^k+1} \leq 1$$

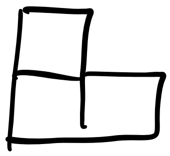
$$\leq 1 + k + 1 = 1 + (k+1)$$

$\square$

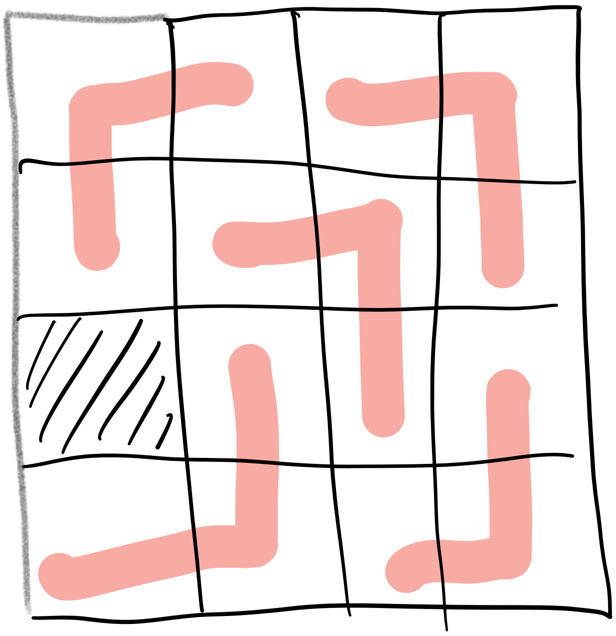


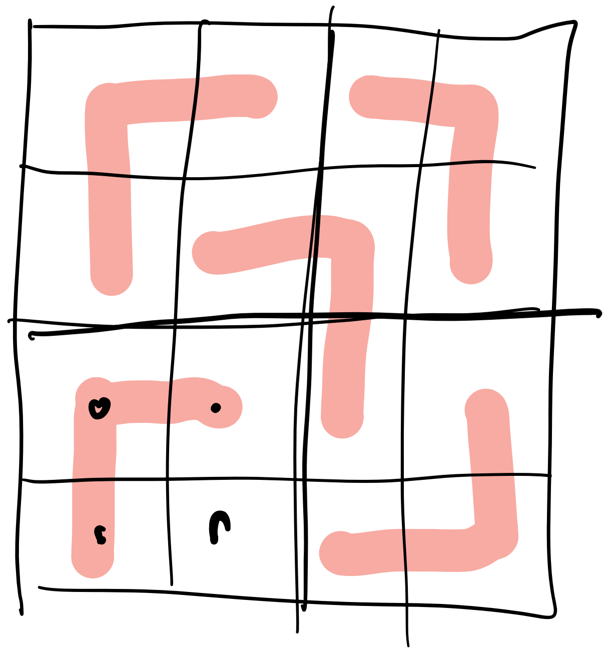
Σκακιέρα

Τριόμινο



Δεν μπορώ να καλύψω την 4×4 σκακιέρα με τριόμινο γιατί $4 \times 4 = 16$ (δεν είναι πολ/σιο του 3)





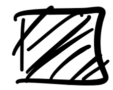
Ν.δ.ο. κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα που της λείπει ένα τετράγωνο καλύπτεται με τριόμινο.

$P(n)$

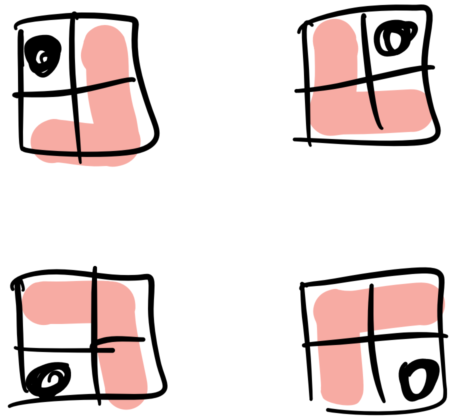
Απόδειξη με Επαγωγή

— Βάση:

$n = 0$



$n = 1$

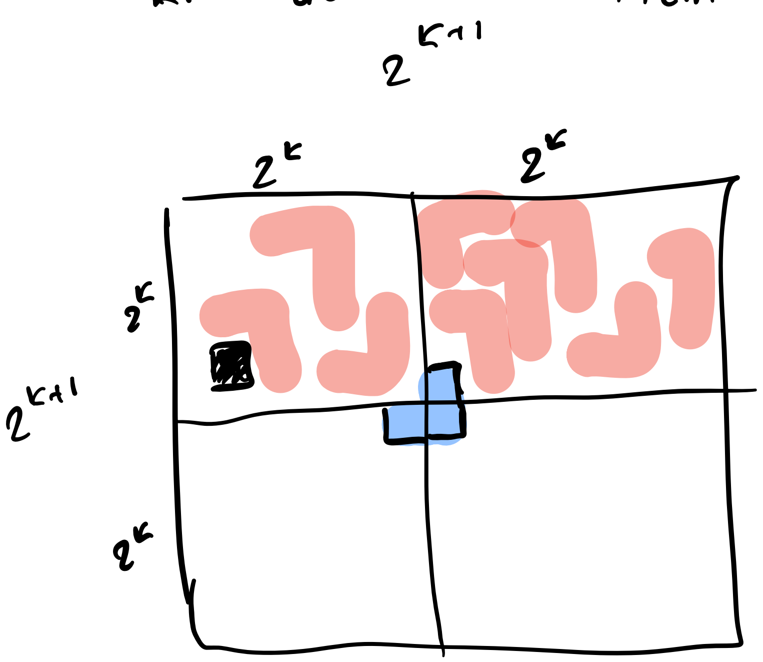


Επαγωγική Υπόθεση: $n = k$

Μπορώ να καλύψω τη $2^k \times 2^k$ σκακιέρα όποιο κουτάκι κι αν λείπει

Επαγωγικό Βήμα: $n = k+1$

Θα δείξω ότι η $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα καλύπτεται όποιο κουτάκι κι αν λείπει



- Σπάω τη σκακιέρα σε 4 υποσκακιέρες $2^k \times 2^k$

- Καλύπτω τη σκακιέρα που έχει το κομμάτι που λείπει με τρίόμινο (από Ε.Υ.)

- Για τις υπόλοιπες 3 υποσκακιέρες καλύπτω όλη τη σκακιέρα πέρα απο το κεντρικό κομμάτι (απο Ε.Υ.)

- Μένουν 3 ακάλυπτα κομμάτια στο κέντρο που τα καλύπτω με ενα τριόμινο.

∎

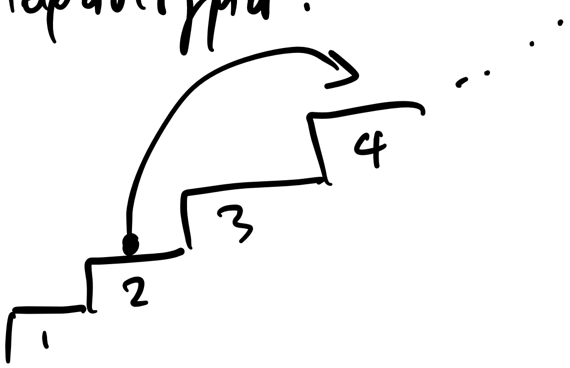
Ισχυρή Επαγωγή

Βάση : $P(n_0)$

Επαγωγική Υπόθεση : Υποθέτω ότι η $P(n)$ ισχύει $n_0 \leq n \leq k$

Επαγωγικό Βήμα : Δείχνω την $P(n)$ για $n = k+1$

Παράδειγμα:



Έχω μια άπειρη σκάλα. Ξέρω ότι μπορώ να φτάσω στο σκαλί 1 και 2 και αν έχω φτάσει

στο k μπορώ να φτάσω
στο $k+2$. Ν.δ.ο.
μπορώ να φτάσω σε
κάθε σκαλί $n \geq 1$

Για να φτάσω στο $k+1$
σκαλί πρέπει να μπορώ
να φτάσω στο $k-1$

η απλή επαγωγική υπόθεση
μου λέει ότι φτάνω στο k
αλλά δεν ξέρω για το $k-1$.

Απόδειξη

Βάση : φτάνω στο σκαλί 1

φτάνω στο σκαλί 2

Επαγωγική Υπόθεση: Μπορώ να φτάσω στο σκαλί n για κάθε n $1 \leq n \leq k$ με $k \geq 2$

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι φτάνω στο $k+1$.

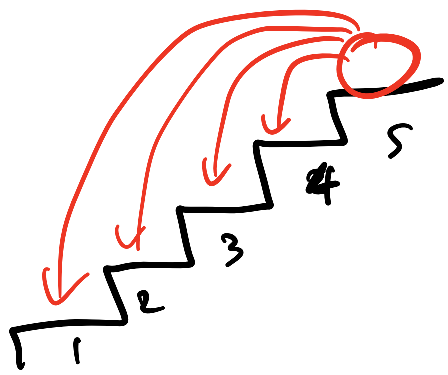
Από ΕΥ φτάνω στο $\underline{k-1}$ που σημαίνει ότι φτάνω και στο $k+1$ γιατί ανεβαίνω 2-2 τα σκαλιά.

Αν $P(n_0)$ ισχύει

και για κάθε $k \geq n_0$

$$\left[P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1) \right]$$

τότε $\forall n \geq n_0 : P(n)$



Παράδειγμα: Ν.δ.ο. κάθε αριθμός $n \geq 2$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.

Απόδειξη

- Βάση Για $n=2$ ισχύει γιατί το 2 είναι πρώτος

- Επαγωγική Υπόθεση: κάθε αριθμός n που είναι $2 \leq n \leq k$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.

- Επαγωγικό Βήμα: Θ.δ.ο. $n=k+1$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.

- Αν το $n = k+1$ είναι πρώτος ✓
- Διαφορετικά υπάρχουν 2 αριθμοί a, b τέτοια ώστε $n = a \cdot b$ με $2 \leq a, b \leq n-1$

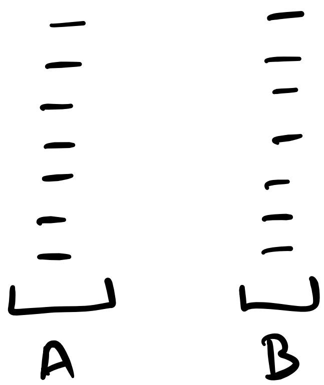
πχ. $\underset{n}{24} = \underset{a}{4} \cdot \underset{b}{6}$

Από επαγωγική υπόθεση τα a, b γράφονται σαν γινόμενα πρώτων άρα και το γινόμενό τους γράφεται σαν γινόμενο πρώτων

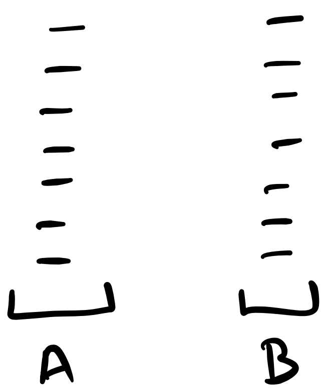
πχ. $24 = \underset{\underset{2 \cdot 2}{\parallel}}{4} \cdot \underset{\underset{2 \cdot 3}{\parallel}}{6} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$\square$

Παράδειγμα



- Δύο παίχτες
- Δυο στήλες με σπίρτα n_A, n_B
- Σε κάθε γύρο ο παίχτης διαλέγει μια στήλη και αφαιρεί όσα σπίρτα θέλει (τουλάχιστον 1)
- Χάνει οποίος δεν μπορεί να πάρει σπίρτο.



Ν.δ.ο. Αν το $n_A = n_B = n$

τότε ο 2ος

έχει στρατηγική νίκης

Απόδειξη

Βάση : $n = 0$: Δεν υπάρχουν
σπίρτα ο πρώτος
χάνει

$n = 1$: Ο πρώτος παίρνει
ένα σπίρτο απο
τη μια στήλη
ο 2ος από την
άλλη και ο 1ος χάνει.

Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι ο 2ος

έχει στρατηγική νίκης

για $0 \leq n \leq k$

δηλ $P(n)$ $\forall 0 \leq n \leq k$

Επαγωγικό Βήμα: Θ.δ. την $P(n)$ για

$n = k+1$

Έστω ότι ο πρώτος παίρνει

$1 \leq a \leq n$ απο μια στήλη

οπότε μένουν $n-a$ σπίρτα

Τότε ο 2ος παίρνει a σπίρτα

από την άλλη

$$(n, n) \xrightarrow{1ος} (n-a, n) \xrightarrow{2ος} (n-a, n-a)$$

$$n-a = k+1-a \in [0, k]$$

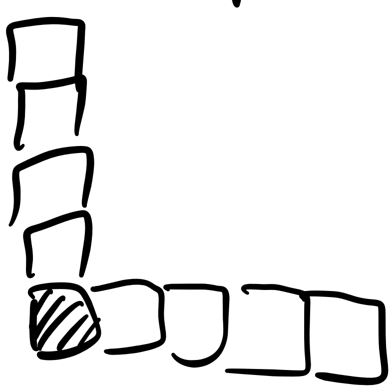
άρα από επαγωγική υπόθεση

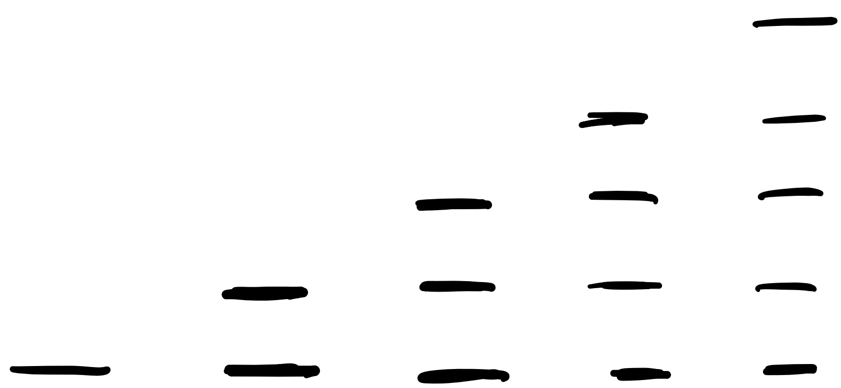
στο $(n-a, n-a)$ κερδίζει ο 2ος

άρα και στο (n, n) κερδίζει

ο δεύτερος. $\square$

chomp





$Fibonacci$

Ασκηση : Να εξετάσετε αν το f_n είναι περιττός ή άρτιος και να το δείξετε με επαγωγή

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_n =$	1	1	2	3	5	8	13	21
	μονός	μονός	ζυγός	μονος	μονός	ζυγός	μονός	μονός

$P(n)$

Αν το $n \bmod 3 = 2$ ($n+1$ διαιρείται με 3)

τότε το f_n άρτιος αλλιώς περιττός

Βάση : Ισχύει για $n = 0 \dots 7$

Υπόθεση : Έστω $P(n)$ ισχύει για $n \leq k$

Βήμα : Θ.δ.ο. η $P(n)$ ισχύει

για $n = k+1$

$$f_{k+1} = f_n = f_k + f_{k-1}$$

περιττός ?

Περιπτώσεις

α - $n \bmod 3 = 0$

β - $n \bmod 3 = 1$

γ - $n \bmod 3 = 2$

a) $$f_{k+1} = \underbrace{f_k}_{\text{άρτιος}} + \underbrace{f_{k-1}}_{\text{περιττός}}$$

$k+1 \bmod 3 = 0$

$k \bmod 3 = 2$

$k-1 \bmod 3 = 1$

άρα f_{k+1} περιττός ✓

β) $$\underbrace{f_{k+1}}_{\bmod 3 = 1} = \underbrace{\underbrace{f_k}_{\bmod 3 = 0}}_{\text{περιττός}} + \underbrace{\underbrace{f_{k-1}}_{\bmod 3 = 2}}_{\text{άρτιος}}$$

άρα f_{k+1} = περιττός ✓

γ) $f_{\underbrace{k+1}_{\bmod 3 = 2}} = \underbrace{f_{\underbrace{k}_{\bmod 3 = 1}}}_{\text{περιττός}} + \underbrace{f_{\underbrace{k-1}_{\bmod 3 = 0}}}_{\text{περιττός}}$

f_{k+1} άρτιος ✓

Άρα σε κάθε περίπτωση $\square$

η $P(n)$ ισχύει

Απορία : Γραμματόσημα αξίας 4 και 5 ευρώ

Τι ποσά μπορώ να σχηματίσω;

$4a + 5b$

με ακέραια a και b

$P(n)$ = Μπορώ να σχηματίσω κάθε ποσό n εκτός αν το $n \in \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ δεν μπορώ

Απόδειξη

$4 = 4$

$5 = 5$

$8 = 4+4$

$9 = 4+5$

$10 = 5+5$

$12 = 4+4+4$

$13 = 4+4+5$

$14 = 4+5+5$

$15 = 5+5+5$

$16 = 4+4+4+4$

Βάση : Η $P(n)$ ισχύει
για $n = 1 \dots 16$

Υπόθεση : Έστω ότι $P(n)$ ισχύει
για $1 \leq n \leq k$

Βήμα : Θ.δ.ο. η $P(n)$ ισχύει
για $n = k+1$ και $k \geq 16$

Θα δείξω ότι γίνεται
να φτιάξω το n

Εφόσον το $n-4 \geq 12$
το $n-4$ γράφεται σαν $4a + 5b$

άρα και το n γράφεται.

- Αν έχω γραμματόσημα m και $(m-1)$ μπορώ να φτιάξω κάθε $n \geq (m-1)m$

Βάση: Αν $n = m(m-1)$ μπορώ να το γράψω σαν m φορές το $m-1$

Αν $n = m(m-1) + a$ με $0 \leq a \leq m$ μπορώ να το σχηματίσω με a γραμματόσημα αξίας m και $m-a$ αξίας $m-1$

Υπόθεση : Μπορώ να φτιάξω κάθε

ποσό $n \leq k$

Βήμα : φτιάχνω το $n = k+1$ με $n \geq m^2$

προσθέτωντας το γραμ. $m-1$

στο $n-(m-1)$.

Το $n-(m-1)$ γίνεται να

φτιαχτεί από επαγωγική

υπόθεση καθώς $n \geq m^2$

και $n-(m-1) \geq m(m-1)$.

<u>Ιδιότητα της καλής διάταξης</u>

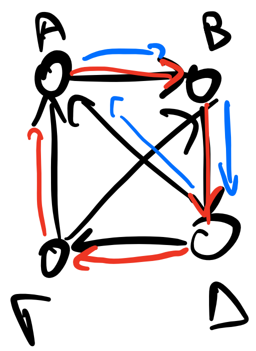
κάθε μη κενό σύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο

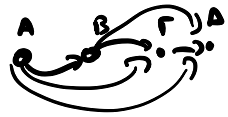
Αν $n \geq 16$ τότε το n γράφεται σαν $n = 4 \cdot a + 5 \cdot b$

Έστω το μικρότερο n που δεν γράφεται. Το $n \geq 20$ γιατι διαφορετικά $n-4 \in [12, 15]$ που ξέρουμε ότι γράφονται.

Εξετάζουμε το $n-4$ το $n-4$ πρέπει να φτιάχνεται διαφορετικά το n δεν θα ήταν το μικρότερο που δεν γράφεται σαν $4a + 5b$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αν φτιάχνεται το $n-1$ φτιάχνεται και το n.

Πρόβλημα Έχουμε ένα τουρνουά με n παίχτες και κάθε παίχτης παίζει αγώνα με κάθε άλλο





Λέμε ότι υπάρχει κύκλος αν υπάρχουν παίχτες

$P_1, P_2, P_3 \dots P_k$

τ.ω. P_1 κερδίζει τον P_2

P_2 " P_3

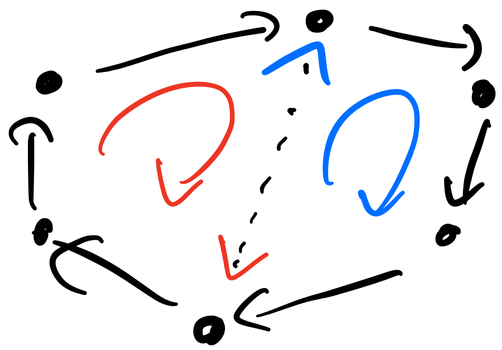
...

P_{k-1} κερδίζει τον P_k

P_k " P_1

N.δ.ο. αν υπάρχει κύκλος με $k \geq 3$ άτομα

υπάρχει κύκλος με 3 άτομα



Επαγωγή στο m

$P(m)$ [Αν υπάρχει κύκλος με m άτομα υπάρχει κύκλος με 3 άτομα

Βάση $m=3$ $P(3)$ ✓

Υπόθεση έστω ότι $P(m)$ ισχύει

για $m \leq k$

Βήμα Θ.δ.ο ισχύει για m+1

Έστω
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m \arrow[llll, bend left] \end{tikzcd}$$

ο κύκλος

– Αν ο 3 κέρδισε τον 1

τότε
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

είναι κύκλος με 3 άτομα.

Διαφορετικά $1 \to 3$

άρα
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & m \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}$$

είναι κύκλος

με m-1 άτομα. Άρα απο

υπόθεση υπάρχει και κύκλος με 3 άτομα.