Αλγόριθμοι και Ρυθμός Αύξησης Συναρτήσεων

Αριθμητική Συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

π.χ. Ο χρόνος εκτέλεσης μιας διεργασίας όταν το μέγεθος εισόδου είναι $n \in \mathbb{N}$ δίνεται από μια συνάρτηση $f(n)$

Αναζήτηση

- Εύρεση ενος αριθμού μέσα σε ένα πίνακα

[1, 3, 7, 5, 4 8, 2]

θέλω να βρω το 4

Γραμμική αναζήτηση

Εξετάζει n στοιχεία (όλα τα στοιχεία)

$f(n) = n$

– Εύρεση ενος αριθμού μέσα σε ένα πίνακα ταξινομημένο

Δυαδική αναζήτηση

$[1, 2, 3, 4, \underbrace{5, 7, 8}]$

ψάχνω το 5

- κοιτάω το 4
  $4 < 5$ άρα στο $[5, 7, 8]$
- κοιτάω το 7
  $7 > 5$ άρα στο $[5]$
- κοιτάω το 5

$$f(n) = 1 + f(\lfloor n/2 \rfloor)$$

$$f(1) = 1$$

$$f(n) = \underbrace{\log_2}_{\text{πόσες φορές}} (n)$$

πόσες φορές

πρέπει να διαιρέσω

το n με 2 για να

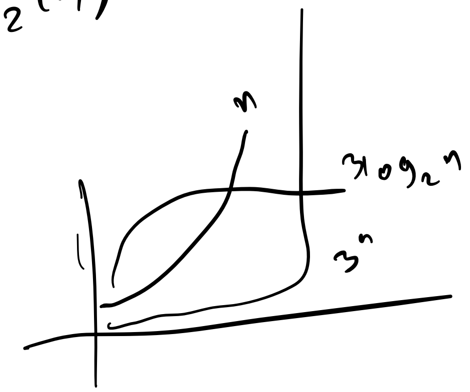
γίνει ≤ 1

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 + f(n/2) \\ &= 2 + f(n/4) \\ &= i + f(n/2^i) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{για } i \text{ τ.ω.} \\ \frac{n}{2^i} \leq 1 \Rightarrow \\ i \geq \log_2 n \end{array} \right]$$

Αριθμητική συνάρτηση

- $f(n) = n^2$
- $g(n) = 3\log_2(n)$
- $h(n) = 3^n$



Ορισμός

Έστω f και g αριθμητικές συναρτήσεις με θετικές τιμές

Λέμε ότι $\boxed{f(n) = O(g(n))}$

"big-O"

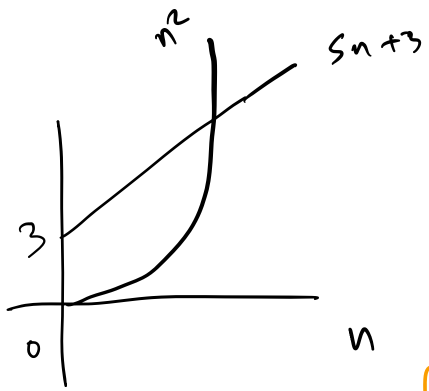
αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$

ισοδύναμα υπάρχει σταθερά c

τ.ω. $f(n) \le c\cdot g(n) \quad \forall n \ge n_0$

π.χ. $f(n) = 5n + 3$

$g(n) = n^2$



$5n+3 \leq 8n^2$

$\forall\, n \geq 1$

$$\boxed{5n+3 = O(n^2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n^2} = 0 < +\infty$$

$$n^2 \neq O(5n+3)$$

- $f(n) = 5n+3$ $\qquad \boxed{5n+3 = O(n)}$

  $g(n) = n$ $\qquad \boxed{f(n) \leq 10\, g(n)}$

  Γιατί $\quad 5n+3 \leq 10 \cdot n$

  $\forall\, n \geq 1$

- Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n} = 5 < +\infty$$

$$\boxed{n = O(5n+3)}$$

$\boxed{\begin{matrix}\sqrt{n} \\ 100\sqrt{n}\end{matrix}} < \boxed{\begin{matrix}5n+3 \\ n\end{matrix}} < \boxed{n^2}$

Αντί για $5n+3 \leq n^2$ δεν είναι σωστός συμβολισμός ✗

γράφουμε $5n+3 = O(n^2)$ ✓

$5n+3 \in O(n^2)$

- $f(n) = n$
  $g(n) = 100\sqrt{n}$

$$100\sqrt{n} = O(n)$$

γιατί $100\sqrt{n} \leq n$

$\forall n \geq 100^2$

Το τεστ του ορίου

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$$ τότε $f(n) = O(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$ αλλά $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Απόδειξη Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < +\infty$

τότε

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$: $n > n_0$

$$\frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$$

Άρα $f(n) < (c+\varepsilon)\, g(n)$

για $n > n_0$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$

  $g(n) = n$

$$\frac{1}{n} + 7 \leq n$$

$$\forall \; n \geq 8$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n} + 7}{n} = 0 \quad \text{άρα}$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(n)$$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$

  $g(n) = \frac{1}{n}$

$$f(n) \neq O(g(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+7}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1+7n$$

$$= +\infty$$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$

  $g(n) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 7$$

$$= 7 < \infty$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(1)$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(n)$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(1)$$

$$\frac{1}{n} + 7 \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} + 7$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{n} \qquad 1 \qquad \sqrt{n} \qquad n$$

$$1 = O\left(\frac{1}{n} + 7\right)$$

giacché $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + 7} = \frac{1}{7} < +\infty$

Αν ισχύει

$$f(n) = O(g(n))$$

$$g(n) = O(f(n))$$

Τότε

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

και

$$g(n) = \Theta(f(n))$$

$\leq$	O
$=$	Θ
$\geq$	Ω

Αν $f(n) = O(g(n))$

τότε $g(n) = \Omega(f(n))$

Κατηγορίες συναρτήσεων

- Πολυωνυμικές

$$f(n) = 5n^3 + 2n^4 + 3n = O(n^4)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 + 2n^4 + 3n}{n^4} = \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^3}\right)$$

$$= 2 < \infty$$

Αν $f(n) = O(n^k)$ για κάποιο σταθερό k

τότε η f είναι πολυωνυμική

π.χ. $f(n) = 5n^{1/3} + \sqrt{n} + n^{1.2}$

$= \Theta(n^{1.2})$

- Εκθετικές $f(n) = a^n$

για σταθερό a

$\forall \, a > 1$ και $k \geq 1$

$n^k = O(a^n)$

Απόδειξη για ακέραιο k

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n^k)'}{(a^n)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{k n^{k-1}}{a^n \ln a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{k(k-1)\, n^{k-2}}{a^n \ln^2 a}$$

$$\dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{k!\, \cancel{n^0}^{\,1}}{a^n \ln^k a} = 0$$

Ποιο είναι μεγαλύτερο;

2^{3n} $\quad$ 3^{2n}

Ισχύει $2^{3n} = O(3^{2n})$;

$8^n = O(9^n)$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{8^n}{9^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

$$n^{100}\, 2^{3n} \quad \text{vs} \quad 3^{2n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{100}\, 8^n}{9^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{100}}{\left(\frac{9}{8}\right)^n} = 0$$

- Λογάριθμοι $f(n) = \log_b n$

όπου $b>1$ σταθερά

Για κάθε $b, b' > 1$

$$\log_b n = O(\log_{b'} n)$$

$$\log_b n = \frac{\ln n}{\ln b}$$

$$= \frac{\ln b'}{\ln b} \frac{\ln n}{\ln b'}$$

$$= \boxed{\frac{\ln b'}{\ln b}} \log_{b'} n$$

σταθερά

Άρα $\log_b(n) = \Theta(\log n)$

Για κάθε $a, b \in \mathbb{N}_+$

$$(\log_2 n)^a = O(n^b)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)^a}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)^a}{\left(2^{\log_2 n}\right)^b}$$

θέτω $m = \log_2 n$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{m^a}{2^{bm}}$$

$$= 0$$

$$2^{\log_2 n} = n$$

$$\sqrt{n} < \frac{n}{\log n} < n < n\log n < n^2 < 1.7^n < \frac{2^n}{n} < 2^n < 2^n \cdot n < 3^n$$

$$\log_{10} n \overset{\Theta}{=} \log_2 n \overset{O}{<} \log_2^{100} n \overset{O}{<} \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n^b \cdot \log^c n}{a'^n \cdot n^{b'} \cdot \log^{c'} n} < +\infty$$

A ✓ $\quad a < a' \quad$ ✓

A ✓ $\quad a = a'$ και $b < b' \quad$ ✓

A ✓ $\quad a = a'$ και $b = b'$ και $c \le c' \quad$ ✓

$$n^5 \log n + n^4 \log^2 n + n^3 = \Theta(n^5 \log n)$$

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \Theta(n^2)$

  $'' \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

- $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \dots + \frac{n}{n} = \Theta(n \log n)$

  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \Theta(\log n)$

- $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots = \Theta(n)$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \leq$$

$$n \cdot n \cdot n \ldots n \leq n^n$$

$$n! = O(n^n)$$

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{(n/2)}$$

Για κάθε $a > 1$ $\quad a^n = O(n!)$

Γιατί για $n \geq (2a)^2$

$$a^n \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! \leq n^n$$

$$\log(n!) = \Theta(n \log n)$$

$$\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \le \log n! \le n \log n$$

$$\underset{\Theta(n\log n)}{\overset{\shortparallel}{\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}}} \qquad\qquad \underset{\Theta(n\log n)}{\overset{\shortparallel}{n\log n}}$$

καλύτερη προσέγγιση για το n!
(Stirling)

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

$$n! = \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

$\binom{n}{k}$ π.χ. $\binom{n}{5}$

$$\binom{n}{k} \le n^k$$

υποσύνολα μεγέθους k

ακολουθίες μήκους k με στοιχεία 1...n

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \rightarrow \text{υποσύνολα μεγέθους } k$$

υποσύνολα που έχουν ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε ομάδα.

$$\underbrace{\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}\quad \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}\quad \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot}_{n/k}}_{k \text{ ομάδες}}$$

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k = \Theta(n^k)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{k^k}\, n^k$$

$$\shortparallel$$

$$\Theta(n^k)$$

$$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$$

- $$\binom{n}{\frac{n}{2}} = O\left(2^n\right)$$

υποσύνολα με $\frac{n}{2}$ στοιχεία

όλα τα υποσύνολα με n στοιχεία

$$\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \simeq \frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\sqrt{n/2}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}\right)^2}$$

$$= \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Να ταξινομήσουμε τις συναρτήσεις

$\cancel{\log n}$ $\quad$ $\cancel{\sqrt{n}}$ $\quad$ $\cancel{3^n}$

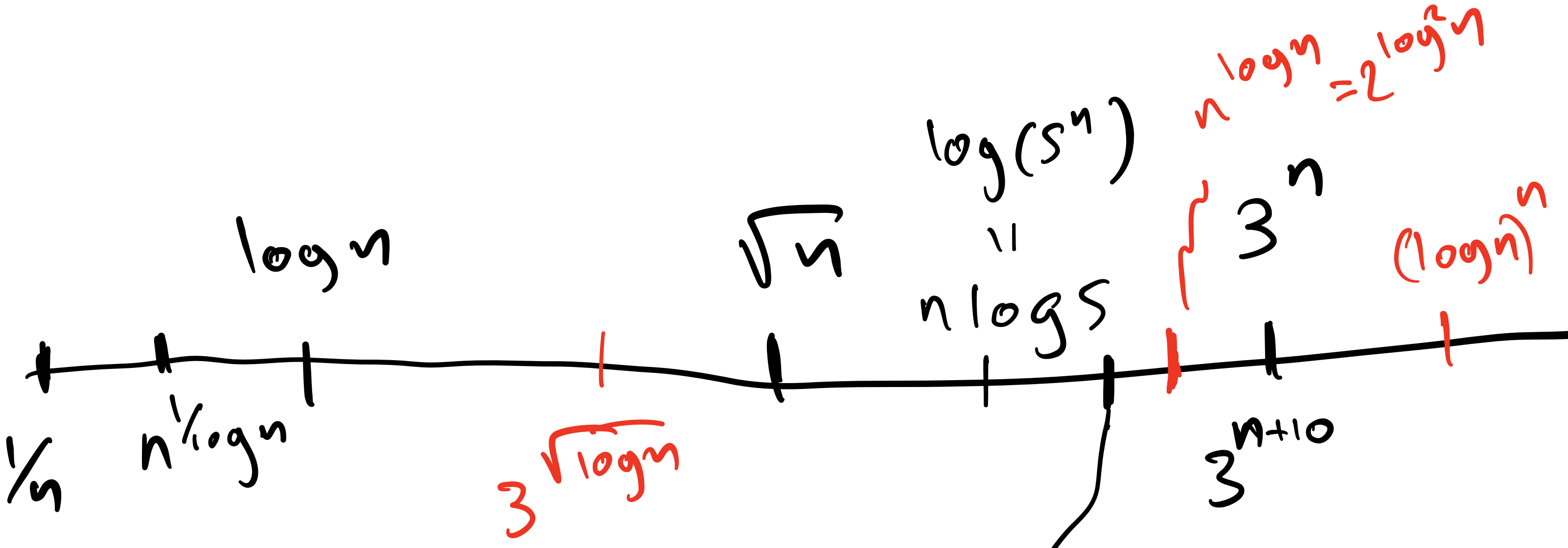
$n^{\log n}$ $\quad$ $3^{\sqrt{\log_2 n}}$ $\quad$ $(\log n)^n$

$\cancel{3^{n+10}}$ $\quad$ $\cancel{\log(5^n)}$ $\quad$ $\underbrace{\cancel{\sqrt{5^{\log_2 n}}}}$

$\cancel{n^{\frac{1}{\log n}}}$ $\quad$ $\cancel{\frac{1}{n}}$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\left(2^{\log n}\right)^{\frac{1}{\log n}} = \Theta(1) \qquad 5^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$$



$$\sqrt{n^{\log_2 5}} = \sqrt{n^{2.\dots}}$$

$$= n^{1.\dots}$$