Αρχές Απαρίθμησης

- Ορισμός: Πείραμα με συγκεκριμένο σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων
- Θέλουμε να απαριθμήσουμε το σύνολο των διαφορετικών αποτελεσμάτων.
- Συνδιαστική : Μελετάει την απαρίθμηση διαφόρων αντικειμένων

Παράδειγμα:

- Password: 6, 7, ή 8 χαρακτήρες

Χαρακτήρες : Γράμματα ή Ψηφία
26 10

Υποχρεωτικά ≥ 1 αριθμητικό ψηφίο

× a a a a a a

πχ. aaaaa0

5 7

abcdef2

a1a1a1

Με 6 χαρακτήρες

$$(26+10)\cdot(26+10)\cdot\ \cdots\ \cdot(26+10) = 36^6$$

$$\to 36^6 - 26^6$$

Με 7 : $36^7 - 26^7$

Με 8 : $36^8 - 26^8$

$\Rightarrow$ Συνολικά $36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8$

– Πολυπλοκότητα αλγορίθμων

Εφαρμογές :

- Κρυπτογραφία
- Τηλεφωνικοί Αριθμοί / Πινακίδες Αυτοκινήτων
- Τυχερά Παιχνίδια

1. Κανόνας του γινομένου

Αν μια διαδικασία διαχωρίζεται σε μια ακολουθία 2 εργασιών

- αν υπάρχουν n_1 τρόποι

εκτέλεσης της πρώτης

- και n_2 τρόποι εκτέλεσης της δεύτερης

Υπάρχουν συνολικά $n_1 \cdot n_2$ τρόποι εκτέλεσης της διαδικασίας

Γενικότερα $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ με k εργασίες

Παράδειγμα: Πόσα πιθανά αποτελέσματα με 2 ζάρια;

$(1,1)$, $(1,2)$ $(1,3)$ $(1,4)$ $(1,5)$ $(1,6)$

$(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(2,4)$ $(2,5)$ $(2,6)$

$(3,1)$ ...

$n_1 = 6$, $n_2 = 6$ άρα $6 \cdot 6 = 36$

Παράδειγμα: Πόσες συμβολοσειρές μήκους 9 με 0/1 ;

$$\left.\begin{array}{l} 000000000 \\ 000000001 \\ 000000010 \\ \vdots \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} n_1 = 2 \\ n_2 = 2 \\ n_3 = 2 \\ \vdots \\ n_9 = 2 \end{array}$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_9 = 2^9 = 512$$

Παράδειγμα: Πόσες πινακίδες με 3 ελληνικά γράμματα και 4 νούμερα;

AAA 0000

ΑΒΓ 1234

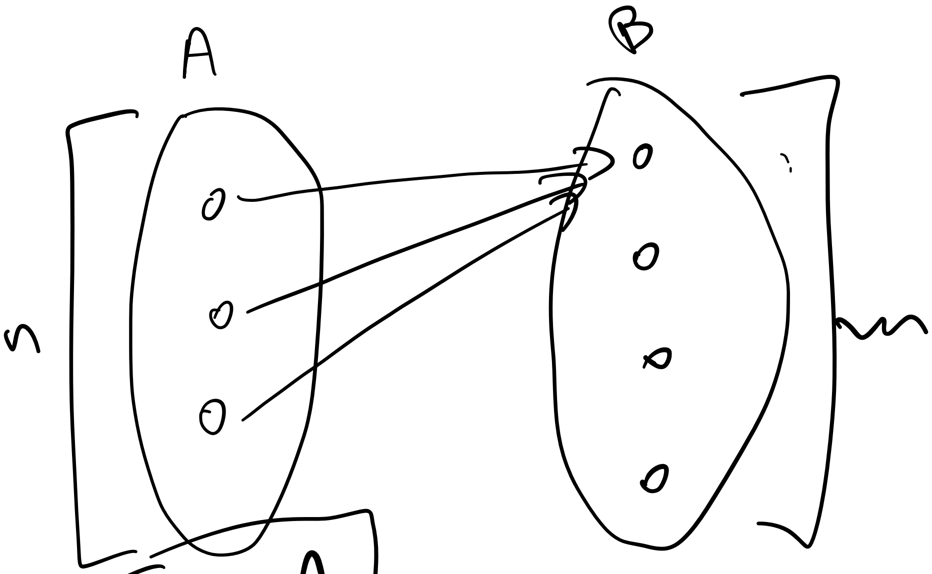
$$n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4 \quad n_5 \quad n_6 \quad n_7$$

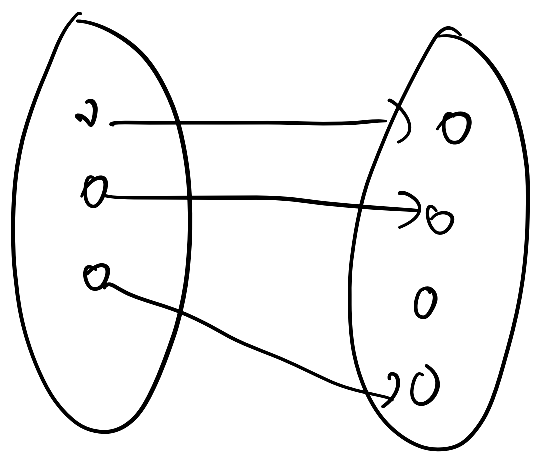
$$\begin{array}{ccccccc} \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ 24 & 24 & 24 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array} = 24^3 \cdot 10^4$$

$$= 138\,240\,000$$

Παράδειγμα: Πόσες συναρτήσεις $f: A \to B$ υπάρχουν αν $|A| = n$

$|B| = m$





$\boxed{f \in B^A}$

m^n

$$\overbrace{B \times B \times \cdots \times B}^{|A|}$$

m επιλογές για το πρώτο στοιχείο του A

m επιλογές για το δεύτερο του A

⋮

m επιλογές για το n-οστό του A

Άρα $m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$

$\underbrace{\hspace{3cm}}_{n\text{ - φορές}}$

Συνολοθεωρητική προσέγγιση

Αν έχουμε σύνολα $A_1, \dots, A_m$

και το πείραμα είναι το

$$A = \underbrace{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m}_{\text{καρτεσιανό γινόμενο}}$$

$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_m) : \forall i : a_i \in A_i\}$$

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_m|$$

Παράδειγμα: 2 ζάρια το 2ο δεν

είναι το ίδιο με το

πρώτο

6 επιλογές για το πρώτο
5 επιλογές για το δεύτερο
άρα $6 \cdot 5 = 30$ επιλογές

Κανόνας του αθροίσματος

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
(χωρίς κοινά στοιχεία)
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2$
τρόποι εκτέλεσης

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m|$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_m|$$

αν $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$ με $i \neq j$

Παράδειγμα: Επιλογές για εργασία

- 18 επιλογές για βιβλιογραφική εργασία
- 35 επιλογές για ανάπτυξη κώδικα

$18 + 35 = 53$ επιλογές

Παράδειγμα Ένας χαρακτήρας:

είτε ψηφίο

είτε ελληνικό γράμμα

$10 + 24 = 34$

Παράδειγμα

15 μπάλες = 7 μονόχρωμες

7 δίχρωμες

1 μαύρη

Γινόμενο

(Μια μονόχρωμη και μια δίχρωμη)

$7 \cdot 7 = 49$

(Μια μπάλα μονόχρωμη ή δίχρωμη)

αλλά όχι μαύρη /

$$= 7 + 7 = 14$$

3. Κανόνας της αφαίρεσης

Αν μια διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί

είτε με n_1 τρόπους

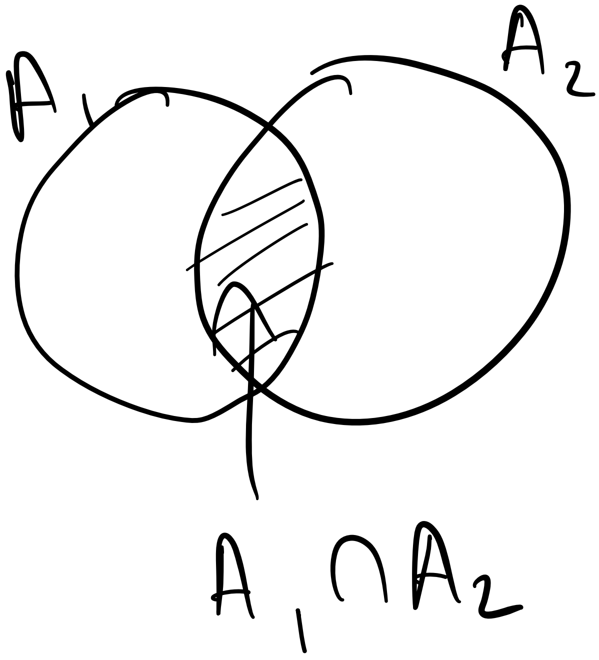
είτε με n_2 τρόπους

εκ των οποίων k είναι κοινοί

τότε υπάρχουν $n_1 + n_2 - k$

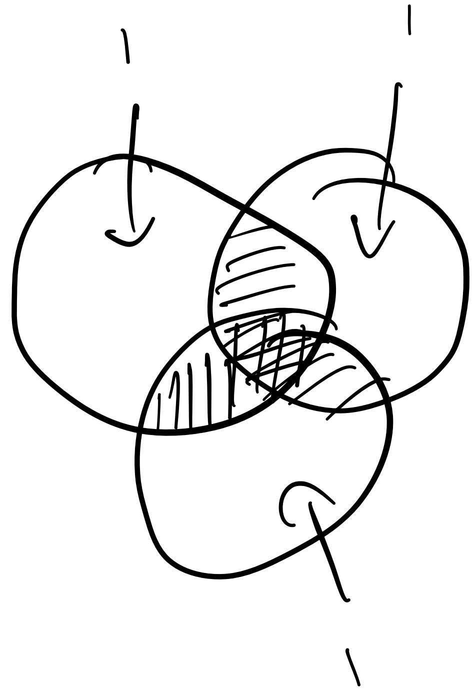
Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



Αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού

Για 3 σύνολα



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$|A_1| + |A_2| + |A_3|$$
$$- |A_1 \cap A_2|$$
$$- |A_2 \cap A_3|$$
$$- |A_1 \cap A_3|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Παράδειγμα: Πόσοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1000 δεν είναι πολλ/σια του 2, 3 ούτε του 5.

1… 999

A_2 = { πολλ/σια του 2 }

A_3 = { πολλ/σια του 3 }

A_5 = { πολλ/σια του 5 }

2 4 6… 998

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 99$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 499 + 333 + 199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$$

$999 - 733 = 266$

αριθμοι δεν ειναι πολλ/σια του 2, 3 ή 5.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 3 άτομα σε μια σειρα

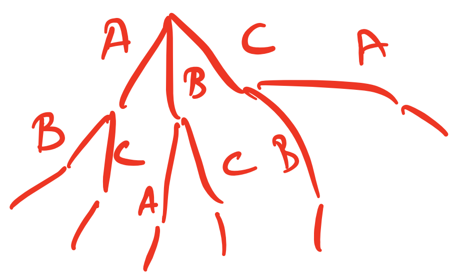
$6 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

A B C   C A B

B A C   C B A

B C A

A C B



10 άτομα; $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Με πόσους τρόπους βάζω ~~3~~ 10 άτομα σε κύκλο;

2 τρόποι

Με 10: Υπάρχουν $10!$ τρόποι αλλά κάθε τρόπος μετριέται 10 φορές

άρα $\frac{10!}{10} = 9!$

4. Κανόνας της διαίρεσης

Αν μετρήσω το κάθε στοιχείο ακριβώς k φορές, μπορώ να διαιρέσω τον αριθμό με k για να βρω το πλήθος των τρόπων όπου κάθε στοιχείο μετράει 1 φορά.

Αρχή του Περιστερώνα (Pigeonhole Principle)

Αν έχουμε k+1 αντικείμενα

και τα βάλουμε σε k κουτιά

τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 κουτί

με 2 ή περισσότερα αντικείμενα

π.χ. Μια συνάρτηση

από $k+1$ στοιχεία σε k

δεν μπορεί να είναι 1-1

Άσκηση Αν σε ένα διαγώνισμα

μπαίνουν βαθμοί 0, 0.5, 1, 1.5,

2, 2.5, ..., 9.5, 10

Πόσοι φοιτητές πρέπει να υπάρχουν

για υπάρχουν σίγουρα 2 άτομα με τον ίδιο

βαθμό;

22 $|\{0, 0.5, \dots, 9.5, 10\}| = 21$

άρα $21+1 = 22$ φοιτητές

Άσκηση Να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n υπάρχει πολ/σιο που αποτελείται μόνο από 0 ή 1.

π.χ.

$$5 \xrightarrow{\times 2} 10$$

$$3 \rightarrow 111$$

$$4 \rightarrow 100$$

$$6 \rightarrow 1110$$

Έστω $A = \{1, 11, 111, \dots, \overbrace{11\dots1}^{n}\}$

Αν υπάρχει $a \in A$ $a \bmod n = 0$ ✓

Διαφορετικά $\forall a \in A$ $a \bmod n \in [1, n-1]$

Αλλά $|A| = n$

άρα υπάρχουν $a, b \in A$ $a \neq b$

$a \bmod n = b \bmod n$

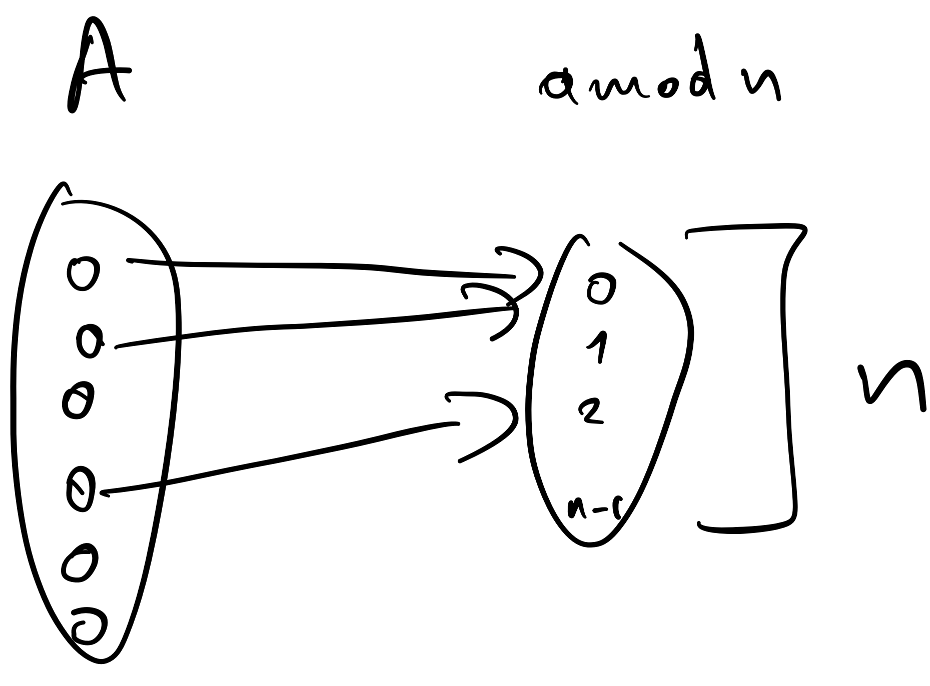
γιατί το μέγεθος του A είναι μεγαλύτερο από τα πιθανά υπόλοιπα

$a > b$ τότε $a = 111111$

b 111

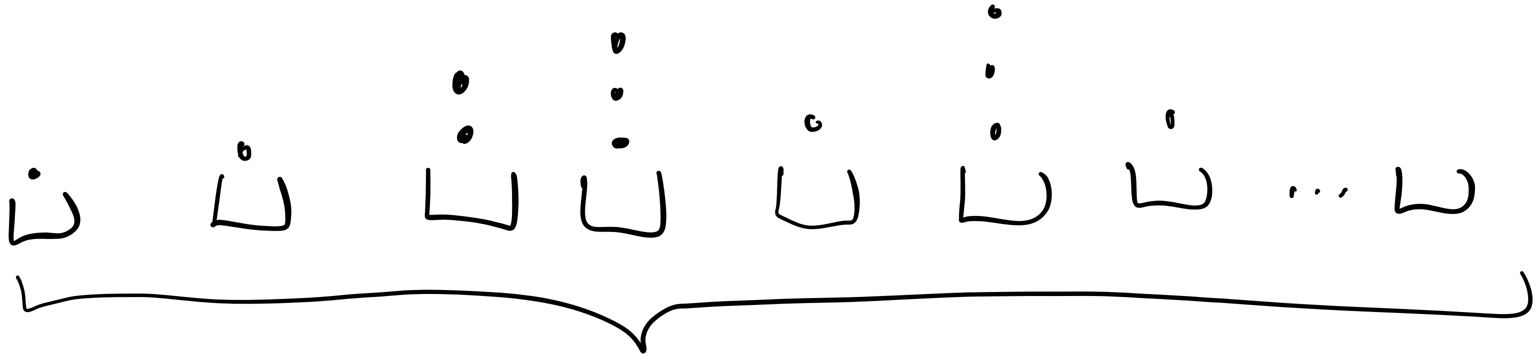
$a - b = 111000$

$(a-b) \bmod n = 0$ $\square$



Άσκηση

Μια ομάδα παίζει αγώνες κάθε μέρα για 30 συνεχόμενες μέρες. Κάθε μέρα έπαιξε τουλάχιστον 1 αγώνα.
Ν.δ.ο. υπάρχει περίοδος διαδοχικών ημερών για τους οποίους παίζει ακριβώς 14 αγώνες, αν έπαιξε σύνολο 45 αγώνες



30 μέρες

Λύση: Έστω a_i το πλήθος

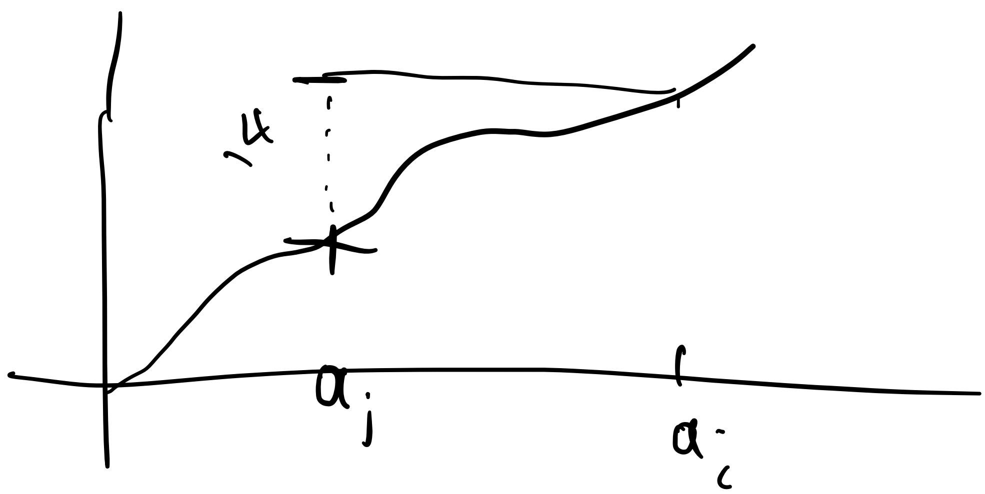
των αγώνων έως τη μέρα i

$$1 \le a_1 < a_2 \qquad < a_{30} \le 45$$

Αν υπάρχει $\underbrace{a_i = a_j + 14}$

στις μέρες $j+1, j+2, \dots, i$

παίχτηκαν ακριβώς 14 αγώνες



$$\boxed{b_j = a_j + 14}$$

$$1 \leq a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}, b_1, b_2, \dots, b_{30} \leq 59$$

Επειδή υπάρχουν 60 όροι

αλλά από 1...59

Δύο όροι είναι ίσοι

άρα υπάρχει $b_j = a_i$

$$\Rightarrow a_i = a_j + 14$$

$\square$

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς αριθμούς περιέχει μια υπακολουθία μήκους $n+1$ που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα

$n^2+1 = 5$

π.χ. $n = 2$ $\quad$ $7, 3, 6, 5, 8$

$(n+1 = 3)$

	7	3	6	5	8
α	2	3	2	2	1
φ	3	1	2	1	1

a_i = μεγαλύτερη αύξουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

φ_i = μεγαλύτερη φθίνουσα υπακολουθία ξεκινάει από θέση i

Έστω ότι $a_i , \varphi_i \le n \quad \forall i$

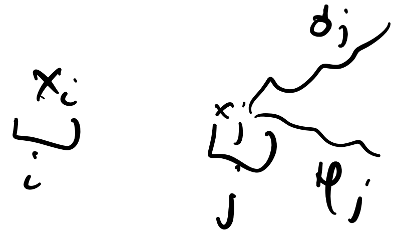
Θα καταλήξω σε άτοπο

Πόσα διαφορετικά ζεύγη (a_i, φ_i) υπάρχουν;

$\le n^2$

Αλλά η ακολουθία έχει μήκος n^2+1

άρα $\exists\, i < j$ με $a_i = a_j$, $\varphi_i = \varphi_j$



Αν $x_i < x_j$ πρέπει $a_i \ge a_j + 1$

Αν $x_i > x_j$ πρέπει $\varphi_i \ge \varphi_j + 1$

σε κάθε περίπτωση $(a_i, \varphi_i) \ne (a_j, \varphi_j)$ άτοπο

$\square$

Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Μετάθεση: Τρόπος διάταξης n στοιχείων σε μια ευθεία

Π.χ. 5 άτομα:

Με πόσους τρόπους μπορούν να μπούν σε μια σειρά για φωτογράφιση;

Μεταθέσεις

ABCDE $\quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

BACDE

⋮

Αν είχα μόνο 3 θέσεις;

$5 \cdot 4 \cdot 3$ (μεταθέσεις - 3)

Θεώρημα: Αν n θετικός ακέραιος και k ακέραιος με $1 \leq k \leq n$ οι μεταθέσεις - k ενός συνόλου με n διαφορετικά στοιχεία είναι

$$P(n,k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ - όρους}}$$

Δηλ. $$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

π.χ. 100 άτομα σε αγώνα

Πόσες 3-άδες νικητών μπορούμε να έχουμε;

$$P(100,3) = \frac{100!}{97!} = 100 \cdot 99 \cdot 98$$

$$= 970{,}200$$

Άσκηση: Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων ABCDEFGH υπάρχουν όπου εμφανίζεται μέσα η συμβολοσειρά ABC

Απ: Υπάρχουν 6 αντικείμενα
ABC, D, E, F, G, H
κάθε διάταξη οδηγεί σε διαφορετική λύση
άρα 6! τρόποι.

Συνδιασμοί

Επιλογή k αντικειμένων απο n χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά
(Σαν μεταθέσεις-k χωρίς διάταξη)

Πχ. Με πόσους τρόπους μπορώ

να επιλέξω 3 άτομα από 4;

Με 4 τρόπους

$C(4,3)$

Συμβολίζουμε $C(n,k)$ το πλήθος των επιλογών k αντικειμένων από n

π.χ. $C(100,3)$

ABC
ACB
BAC
BCA
CBA
CAB

ίδια λύση

$$\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}$$

$$P(n,k) = C(n,k)\cdot \underbrace{P(k,k)}_{k!}$$

$$\Rightarrow C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Θεώρημα: Το πλήθος των συνδιασμών-κ από n στοιχεία είναι

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Από 4 να επιλέξω 3:

$$C(4,3) = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

π.χ. Έχω 52 χαρτιά στην τράπουλα και θέλω 5; $C(52,5)$

$$= \frac{52!}{47!\,5!}$$

πχ. Πόσες συμβολοσειρές με bits 0-1 μήκους n υπάρχουν που έχουν k άσσους;

$$C(n,k)$$

$n=5$ 00011 $C(5,2)$

00101

$k=2$ 00110

⋮

$$C(5,2) = C(5,3)$$

επιλέγω 2 άσσους — επιλέγω 3 μηδενικά

$$\boxed{C(n,k) = C(n,n-k)}$$

$$C(n,n-k) = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= C(n,k)$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

διωνυμικός συντελεστής

(n ανά k)

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + x^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + \underset{\binom{4}{1}}{4x^3y} + \underset{\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6}{6x^2y^2} + \underset{\binom{4}{3}}{4xy^3} + y^4$$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}}$$

Διωνυμικό Θεώρημα

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}\underbrace{(x+y)}\cdots\underbrace{(x+y)}$$

$$x^i y^{n-i}$$

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

$\ldots x^2y^2$

$\binom{4}{2}$ όλες οι συμβολοσειρές μήκους 4 με 2 1

$$\left.\begin{array}{cccc} x & x & y & y \\ x & y & x & y \\ x & y & y & x \\ y & x & x & y \\ y & x & y & x \\ y & y & x & x \end{array}\right] \binom{4}{2} =$$

Πόρισμα $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Απόδ.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n$$

Θέτοντας $x = y = 1$ D

Πόρισμα $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$$

$n = 3$ $$\underbrace{\cancel{\binom{3}{0}}} - \underbrace{\cancel{\binom{3}{1}}} + \underbrace{\cancel{\binom{3}{2}}} - \underbrace{\cancel{\binom{3}{3}}}$$

Αποδ $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i}$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i} y^{n-i} = (x+y)^{n}$$

$x = -1 \quad , \quad y = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i} = (-1+1)^{n} = 0$$

Πόρισμα : $\sum_{k=0}^{n} 2^{k} \binom{n}{k} = 3^{n}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k} = (x+y)^{n}$$

$x = 2 \quad , \quad y = 1$

Τρίγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{1} \quad \binom{n+1}{2} \quad \binom{n+1}{3} \qquad\qquad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}$$

Θεώρημα: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

$n+1$ επιλογές επιλέγω k

Απόδειξη

1 2 3 ... n+1

Όλες οι πιθανές κ-άδες είναι $\binom{n+1}{k}$

- Όλα τα υποσύνολα (κ-άδες) που δεν περιέχουν το (n+1)

$\Rightarrow \binom{n}{k}$

- Όλες τις κ-άδες που περιέχουν το n+1

$\Rightarrow \binom{n}{k-1}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \square$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} \qquad \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!\cdot k}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!}\left(n+1-k \quad + \quad k\right)$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n+1-k)!}\,(n+1)$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7 = 56$$

$$\binom{n}{k} = C(n, k)$$

- Επιλέγω k αντικείμενα από n
- Πόσες συμβολοσειρές bit

  με n χαρακτήρες περιέχουν

  ακριβώς k άσσους / $n-k$ μηδενικά.

Θεώρημα: Vandermonde

$$\binom{m+n}{r} = \underbrace{\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}}$$

m αγόρια   ομάδα με r

n κορίτσια   άτομα

Α τρόπος : $m+n$ άτομα

άρα $\binom{m+n}{r}$

πιθανές ομάδες r

ατόμων.

Β τρόπος : Ομάδες με k κορίτσια

$$\underbrace{\binom{m}{r-k}}_{\text{απο } m \text{ αγόρια επιλέγω } r-k} \cdot \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{απο } n \text{ κορίτσια επιλέγω } k}$$

Άρα συνολικά $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

Ν.δ.ο. $$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$$

Θέλω από n άτομα

να διαλέξω μια ομάδα με

1 αρχηγό.

Έστω $n=3$

$$\left.\begin{array}{lcc} & \text{αρχηγός} & \\ \{1,2,3\} & \longrightarrow & 1 \\ \{1,2,3\} & \longrightarrow & 2 \\ \{1,2,3\} & \longrightarrow & 3 \end{array}\right] \binom{3}{3} \cdot 3$$

12 επιλογές

$\{1,2\} \to 1$

$\{1,2\} \to 2$

$\{1,3\} \to 1$

$\{1,3\} \to 3$

$\{2,3\} \to 2$

$\{2,3\} \to 3$

$\binom{3}{2}\cdot 2$

$\{1\} \to 1$

$\{2\} \to 2$

$\{3\} \to 3$

$\binom{3}{1}\cdot 1$

2 τρόποι να τις μετρήσω

A τρόπος

Για κάθε μέγεθος k απο 1 εως n

- Επιλέγω μια ομάδα με k άτομα $\quad \binom{n}{k}$
- Επιλέγω αρχηγό $\quad k$

Συνολικα $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

B τρόπος

- Πρώτα επιλέγω αρχηγό $\quad n$
- Απο τα $n-1$ άτομα που έμειναν διαλέγω ένα υποσύνολο $\quad 2^{n-1}$

Συνολικα $n \cdot 2^{n-1}$

Ν.δ.ο.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2}_{\sum_{k=1}^{n} k \underbrace{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}} = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Υπάρχουν n αγόρια και n κορίτσια

Θέλω ομάδα n ατόμων με αρχηγό κορίτσι

Α τρόπος: Για κάθε πλήθος κοριτσιών k

- Επιλέγω k κορίτσια] $\binom{n}{k}$
- Επιλέγω $n-k$ αγόρια] $\binom{n}{n-k}$
- Επιλέγω ποιο από τα $\underbrace{k \text{ κορίτσια είναι αρχηγός}}_{k \text{ επιλογές}}$

Συνολικά $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

Β τρόπος :

- Πρώτα επιλέγω $\underbrace{\text{κορίτσι αρχηγό}}_{n}$
- Απο τα υπόλοιπα $2n-1$ άτομα επιλέγω $n-1$ για να συμπληρώσω την ομάδα $\binom{2n-1}{n-1}$

Συνολικά $n\binom{2n-1}{n-1}$

Γενικευμένες Μεταθέσεις και Συνδιασμοί

Απο n αντικείμενα επιλέγω k

πχ. $n=3$ $\{A, B, C\}$ $k=2$

Μεταθέσεις		Συνδιασμοί
AB	BA	BC, AC, AB
AC	CA	
BC	CB	
6 τρόποι		3 τρόποι

Με επανάληψη;

Μεταθέσεις

AA	AB	BA
BB	AC	CA
CC	BC	CB

9 τρόποι

n επιλογές

$$\underbrace{\sqcup \quad \sqcup \; .. \; \sqcup}_{k \text{ θέσεις}}$$

$$n^k = n \cdot n \cdot n \ldots n$$

Συνδυασμοί

AA	AB
BB	AC
CC	BC

6 τρόποι

Συνδιασμοί με επανάληψη

$n=3$
$k=3$

ABC BBB

AAA CCC

AAB BCC

AAC ACC

ABB

BBC

Θεώρημα: Οι συνδιασμοί με επαν. k στοιχείων από n είναι $\binom{n+k-1}{k}$

$$\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

A B C

$\sqcup \mid \sqcup \mid \sqcup$	A B C
$\sqcup \ \sqcup \ \sqcup \mid \mid$	A A A
$\sqcup \ \sqcup \mid \sqcup \mid$	A A B
$\sqcup \ \sqcup \mid \mid \sqcup$	A A C
$\mid \sqcup \mid \sqcup \ \sqcup$ $\longleftrightarrow$	B C C
$\vdots$	$\vdots$

$\binom{5}{3}$

Το πλήθος των συνδιασμων n στοιχειων σε k θεσεις με επανάληψη είναι το ίδιο με το πλήθος των τρόπων που μπορώ να διατάξω k κουτάκια και $n-1$ γραμμές

$$\binom{k+n-1}{k}$$

$n=4 \qquad k=3 \qquad A\ B\ C\ D$

$$\sqcup \ | \ | \ \sqcup \ | \ \sqcup \quad \longleftrightarrow \quad A\ C\ D$$

π.χ. Πόσοι 5-ψήφιοι αριθμοί έχουν τα ψηφία σε μη φθίνουσα διάταξη

π.χ.

13599	✓	
11288	✓	
15489	✗	
	(α)	(β)
06889	✗	✓

$k=5$ (α) $n=9$ χωρίς το 0

(β) $n=10$ αν επιτρέπεται το 0

(α) $$\binom{5+9-1}{5} = \binom{13}{5}$$

(β) $$\binom{5+10-1}{5} = \binom{14}{5}$$

Συμβολοσειρών μήκους 7 με 0-1 που περιέχουν το 1101

1101xxx	8	
x1101xx	8	
xx1101x	8	
xxx1101	8	

x	x	x
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

$\overbrace{1101}\!101$, $110\underbrace{1101}$

$4 \cdot 8 - 1 = 31$

5ψήφιων με τουλάχιστον 2 ψηφία πολ/σια του 3

- ακριβώς 2 ψηφία
- ακριβως 3 ψηφία
- ακριβως 4 ψηφία
- ακριβως 5 ψηφία

0 3 6 9 πολ/σια του 3

1 2 4 5 7 8

× ✓ ✓ × × $4^2 \cdot 6^3$

Όλοι οι πενταψήφιοι

- κανένα πολ/σιο του 3
- 1 πολ/σιο του 3

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

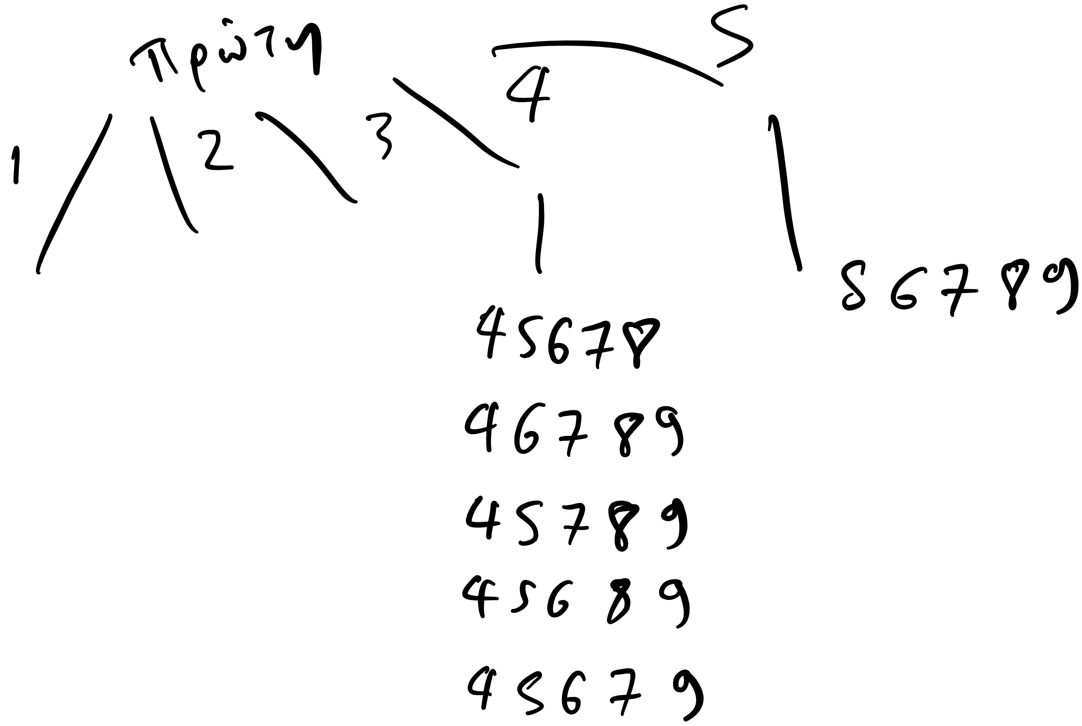
$- 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

$- (5 \quad 4 \cdot 6^4 - 6^4)$

$(4 \cdot 4 \cdot 6^4 + 3 \cdot 6^4)$

5 ψήφιοι με αύξουσα σειρά ψηφίων

5 6 7 8 9



Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ 5ψήφιων σε αύξουσα σειρά και υποσυνόλων S

$S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$|S| = 5$ με 5 στοιχεία

π.χ.

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$1\,5\,6\,7\,9 \longleftrightarrow \{1, 5, 6, 7, 9\}$

$\{3, 5, 7, 1, 2\} \longleftrightarrow 1\,2\,3\,5\,7$

Άρα είναι $\binom{9}{5}$ συνολικά

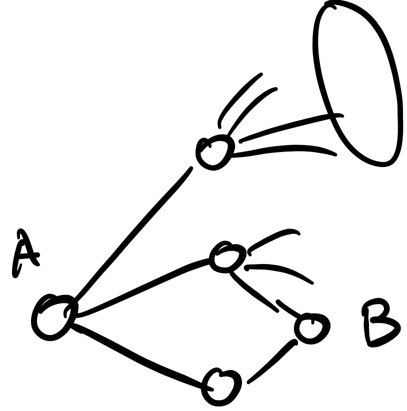
• Αν δεν έχουν μέσα το S

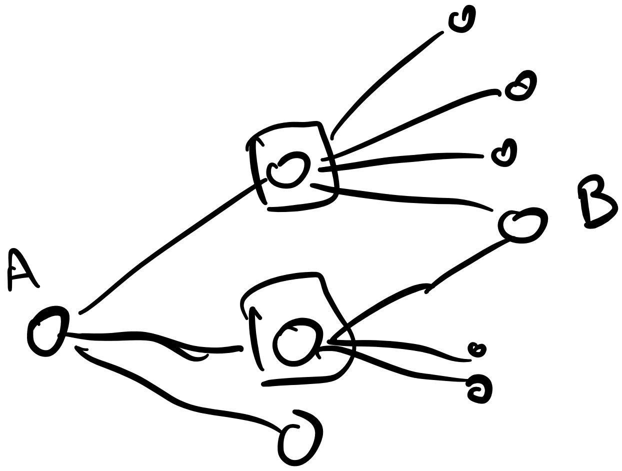
$\binom{8}{5}$

• Αν θέλουμε να έχουν το S

$\binom{9}{5} - \binom{8}{5} = \binom{8}{4}$ // γιατί $\binom{9}{5} = \binom{8}{5} + \binom{8}{4}$

$k \geq \sqrt{n} + 1$





$k(k-1)$

KINO

- 80 αριθμοί
- 20 αριθμοί κληρώνονται
- Παίχτης παίζει 1 έως 12 αριθμούς

πχ Παίζω 5 αριθμούς

Βγαίνουν 3 → x2 λεφτά

Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσω; πχ. αν παίζω 1 αριθμό

<u>Συνοικά αποτελέσματα</u>

Συνολικά αποτελέσματα

Συνολικά αποτελέσματα $= \binom{80}{20}$

Ευνοικά αποτελέσματα $= \binom{79}{19}$

Πιθανότητα να κερδίσω;

- Αν παίξω 1 νούμερο;

$$\frac{\binom{79}{19}}{\binom{80}{20}} = \frac{\frac{79!}{19!\,60!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \underbrace{2{,}5}_{\text{απόδοση ΟΠΑΠ}} = \underbrace{0.625}_{\text{Αναμενόμενο επιστροφή χρημάτων αν παίξω 1€.}}$$

— Αν παίξω 2 νούμερα;

Για να πιάσω 2 νούμερα

Πιθανά Αποτελέσματα $= \binom{80}{20}$

Ευνοϊκά Αποτελέσματα $= \binom{78}{18}$

$$\frac{\binom{78}{18}}{\binom{80}{20}} = \frac{\frac{78!}{18!\,60!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{19 \cdot 20}{79 \cdot 80} = \frac{19}{79}\,\frac{1}{4}$$

$$\simeq 0.0601$$

$$0.06 \cdot \underbrace{5}_{\text{απόδοση}} = 0.30$$

Αλλά κερδίζω και αν πιάσω 1/2.

Πιθανότητα να πετύχω ακριβώς 1 από τα 2;

Ευνοϊκά Αποτελέσματα $= 2\binom{78}{19}$

$$\frac{2\binom{78}{19}}{\binom{80}{20}} = \frac{2\,\frac{78!}{19!\,59!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{2\cdot 20\cdot 60}{79\cdot 80}$$

$$\simeq 0.38$$

Άρα συνολικά

$$6\% \underbrace{\times 5}_{\text{απόδοση } 2/2} + 38\% \times \underbrace{1}_{\text{απόδοση } 1/2} = 0.68$$

- Γενικότερα η πιθανότητα των k στα n

Περίπτωση που πιάνω k νούμερα από τα 20 και έχω παίξει n;

$$\frac{\binom{80-n}{20-k}\cdot\binom{n}{k}}{\binom{80}{20}}$$

Μονά - Ζυγά - Ισοπαλία

$1, 3, 5, \ldots, 79$ — 40 μονοί — επιλέγω 10

$2, 4, 6, 8, \ldots, 80$ — 40 ζυγοί — επιλέγω 10

$$\binom{40}{10} \times \binom{40}{10}$$

Με $\binom{40}{10}^2$ τρόπους έρχεται ισοπαλία

Πιθανότητα $$\frac{\binom{40}{10}^2}{\binom{80}{20}} = 0.2032$$

Με απόδοση 4

αναμενόμενο κέρδος $4 \times 0.2032 \simeq 0.81$

Με πόσους τρόπους έρχεται μονό;

$$A = \sum_{i=0}^{9} \binom{40}{i} \binom{40}{20-i} = \sum_{i=11}^{20} \binom{40}{i} \binom{40}{20-i}$$

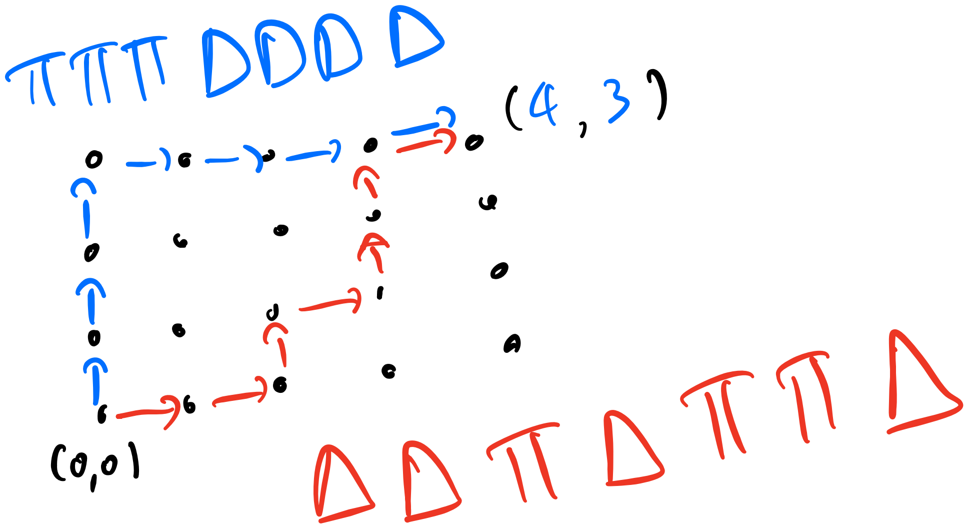
$$2A = \sum_{i \in \{0,1,2,\dots,9,\ 11,12,13,\dots,20\}} \binom{40}{i} \binom{40}{20-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{20} \binom{40}{i} \binom{40}{20-i} - \binom{40}{10}^2$$

$$= \binom{80}{20} - \binom{40}{10}^2$$

$$A = \frac{\binom{80}{20} - \binom{40}{10}^2}{2}$$

Άσκηση



Ξεκινάω από το $(0,0)$

και πάω δεξιά $(x,y) \to (x+1,y)$

ή πάνω $(x,y) \to (x,y+1)$

Με πόσους τρόπους φτάνω στο $(4,3)$;

Π Π Δ Δ Π Δ Δ

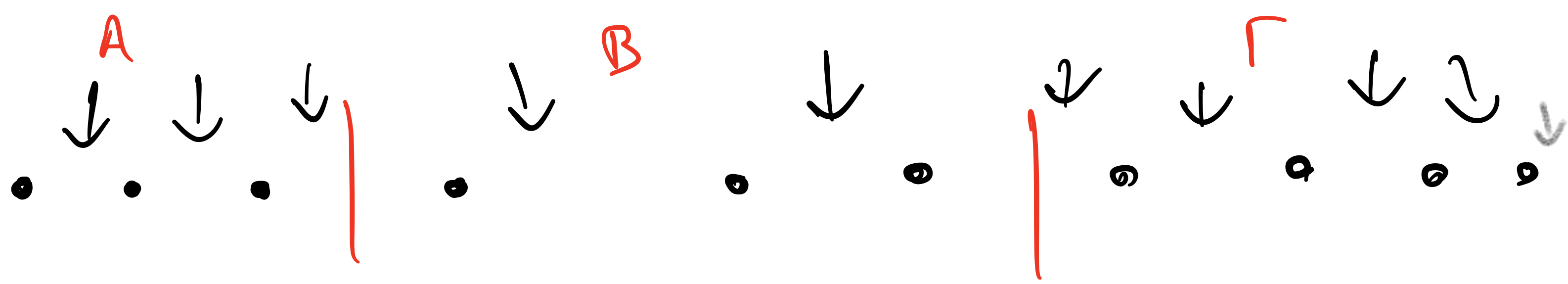
$$\binom{7}{3}\cdot 1 = \binom{7}{4}\cdot 1 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35$$

10 βιβλία και 3 ράφια

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα βιβλία στα ράφια;

- Διαφορετικά ράφια

  Ίδια βιβλία

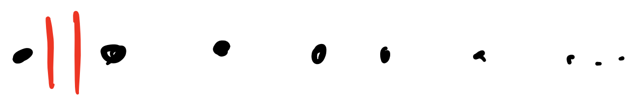


$(3,3,4)$

$(1,0,9)$

$(9,0,1)$

$\vdots$



$$\binom{12}{2}$$

υπάρχουν 12 χαρακτήρες $(\bullet, |)$

και 2 διαχωριστικά.

1 βιβλίο σε κάθε ράφι;

7 βιβλία για 3 ράφια

$\binom{9}{2}$ τρόποι όπως πριν

9 θέσεις για 2 διαχωριστικά

$\binom{9}{2}$

- Διαφορετικά βιβλία
  Διαφορετικά ράφια

$$\begin{array}{l} 1\ 3 \\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{array} \neq \begin{array}{l} 3\ 1 \\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{array} \neq \begin{array}{l} 3\ 2 \\ 1\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{array}$$

$$\binom{12}{2} \cdot 10!$$

- Αν δεν με νοιάζει η σειρά στο ράφι

$$\left|\begin{array}{l} 1\ 3 \\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 3\ 1 \\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{array}\right. \neq \left|\begin{array}{l} 3\ 2 \\ 1\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{array}\right.$$

$$\boxed{3^{10} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}$$

Το πρώτο ράφι έχει 3 βιβλία

δεύτερο 3 βιβλία

4

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = \frac{10!}{3!\,7!} \frac{7!}{3!\,4!} \frac{4!}{4!\,0!}$$

$$\frac{10!}{3!\,3!\,4!} = \binom{10}{3,3,4} = \binom{10}{3,3}$$

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots a_k} = \frac{n!}{a_1!\, a_2! \ldots a_k!\, (n-a_1-a_2-a_k)!}$$

Τράπουλα με 52 χαρτιά

μοιράζω 7 σε 5 άτομα

$$\binom{52}{7,7,7,7,7} = \frac{52!}{7!\,7!\,7!\,7!\,17!} =$$

$$= \binom{52}{7} \cdot \binom{45}{7} \cdot \binom{38}{7} \cdot \binom{31}{7} \cdot \binom{24}{7}$$