Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Μαθηματική Επαγωγή - Ισχυρή Επαγωγή

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι αν $h > -1$ τότε $1 + nh \leq (1 + h)^n$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n. Αυτή είναι η λεγόμενη **ανισότητα Bernoulli**.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $1 + nh \leq (1+h)^n, \forall h > -1$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\forall h$ έχουμε $(1+h)^0 = 1$, άρα η ανισότητα γίνεται $1 \leq 1$.

Επαγώγικο βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $1 + kh \leq (1+h)^k$. Τότε αφού $1 + h > 0$ έχουμε $(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh)$ βάσει επαγωγικής υπόθεσης. Το δεύτερο μέρος της ανισότητας αναπτύσσεται ως $1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, οποτεδήποτε ο n είναι περιττός θετικός αριθμός.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, αν n θετικός περιττός. Θέτουμε $n = 2k - 1$ και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για κάθε k.

Βήμα βάσης: Αν $k = 1$, τότε $n^2 - 1 = 0$ και προφανώς διαιρείται από το 8, δείχνοντας ότι η $P(1)$ ισχύει.

Επαγώγικο βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $(2k-1)^2 - 1$ διαιρείται από το 8. Τότε $(2k-1)^2 - 1 = 8m$ για κάποιον m θετικό ακέραιο. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $(2(k+1)-1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 =$ $4k^2 - 4k + 1 - 1 + 8k = (2k-1)^2 - 1 + 8k = 8m + 8k$, αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό.

Άσκηση 3

α. Βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

εξετάζοντας τις τιμές έκφρασης για μικρές τιμές του n.

β. Να αποδείξετε τη σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (α) .

α. Συμβολίζουμε το άθροισμα με $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$. Παρατηρούμε ότι $S(1) = \frac{1}{2}, S(2) = \frac{3}{4}, S(3) = \frac{7}{8} \ldots$ Άρα υποθέτουμε ότι $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

β. Έστω $P(n)$ η πρόταση $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Θα αποδείξουμε την πρόταση για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $S(1) = \frac{1}{2}$, οπότε η $P(1)$ ισχύει.

Επαγώγικο βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $S(k) = \frac{2^k - 1}{2^k}$.
Έχουμε $S(k+1) = S(k) + \frac{1}{2^{k+1}}$, από τον ορισμό του αθροίσματος. Άρα $S(k+1) = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$ από επαγωγική υπόθεση. Δηλαδή $S(k+1) = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$, αποδεικνύοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Άσκηση 4

Σε μια τράπεζα το ATM έχει χαρτονομίσματα των 20 και 50 €. Ποια χρηματικά ποσά μπορεί να δίνει αν θεωρήσουμε ότι έχει απεριόριστη ποσότητα αυτών των χαρτονομισμάτων? Η απάντηση να αποδειχτεί με χρήση μαθηματικής επαγωγής.

Μπορεί να δώσει όλα τα χρηματικά ποσά που είναι πολλαπλάσια των 10€ που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από 40€, καθώς και το ποσό των 20€. Έστω $P(n)$ η πρόταση $\Pi(n) = 10n$.

Βήμα βάσης: Για $n = 4$ μπορεί να δοθεί το ποσό των 40€ $\Pi(n) = 40 = 20n_{20}$, $P(4)$ αληθής και $n_{20} = 2$ (δύο εισοσάευρα)

Επαγώγικο βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής για $k > 4$. Τότε η επαγωγική υπόθεση είναι: $\Pi(k) = 10k = 50n_{50} + 20n_{20}$, όπου n_{50}, n_{20} μη αρνητικοί ακέραιοι (πενηντάευρα και εικοσάευρα). Αν $n_{50} > 0$, τότε ένα πενηντάευρο μπορεί να αντικατασταθεί από τρια εικοσάευρα και πράγματι ισχύει $10(k+1) = 50(n_{50} - 1) + 20(n_{20} + 3)$. Συνεπώς $P(k+1)$ αληθής. Από την άλλη, αν $n_{50} = 0$, τότε δύο εικοσάευρα μπορούν να αντικατασταθούν από ένα πενηντάευρο και πράγματι ισχύει $10(k+1) = 50(n_{50} + 1) + 20(n_{20} - 2)$ (αφού το ποσό είναι μεγαλύτερο των 40€ και άρα $n_{20} \geq 2$), συνεπώς $P(k+1)$ αληθής, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 5

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

α. Να αποδείξετε ότι $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, για κάθε n θετικό ακέραιο.

β. Να αποδείξετε ότι $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$, για κάθε n θετικό ακέραιο.

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

α. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση $P(k)$ ισχύει. Τότε βάσει ορισμού της ακολουθίας Fibonacci $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$, άρα $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = (f_k + f_{k+1})f_k - f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) + f_k^2$. Όμως πάλι βάσει ορισμού της ακολουθίας $f_k - f_{k+1} = -f_{k-1}$, δίνοντας τελικά ότι $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = -f_{k-1}f_{k+1} + f_k^2 = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, δείχνοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

β. Έστω το άθροισμα $F(n) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \cdot f_i$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $F(n) = f_{2n-1} - 1$ ισχύει για κάθε ακέραιο.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_0 - f_1 + f_2 = 0 = f_1 - 1$, οπότε ισχύει η πρόταση $P(1)$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(k)$. Τότε $F(k+1) = F(k) - f_{2k+1} + f_{2k+2}$. Από τον ορισμό της ακολουθίας Fibonacci $f_{2k+2} = f_{2k+1} + f_{2k}$ και από την επαγωγική υπόθεση $F(k) = f_{2k-1} - 1$. Συνολικά $F(k+1) = f_{2k-1} - 1 + f_{2k} = f_{2k+1} - 1$, αποδεικνύοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 6

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι $\sum_{j=0}^{n}(j+1) = (n+1)(n+2)/2$ όταν ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $\sum_{j=0}^{n}(j+1) = (n+1)(n+2)/2, \forall n \geq 0$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\sum_{j=0}^{0}(j+1) = 0+1 = (0+1)(0+2)/2$.

Επαγώγικο βήμα:

Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $\sum_{j=0}^{k}(j+1) = (k+1)(k+2)/2$.

Τότε $\sum_{j=0}^{k+1}(j+1) = \sum_{j=0}^{k}(j+1) + [(k+1)+1] = (k+1)(k+2)/2 + (k+2)$

$= (k+2)[(k+1)/2+1] = (k+2)(k+3)/2 = [(k+1)+1][(k+1)+2]/2$,

ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 7

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι n διαφορετικές ευθείες στο επίπεδο που διέρχονται από το ίδιο σημείο, χωρίζουν το επίπεδο σε $2n$ διακριτά μέρη. Προφανώς $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $P(1)$ είναι αληθής καθώς μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

Επαγώγικο βήμα:
Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή k ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο χωρίζουν το επίπεδο σε $2k$ διακριτά μέρη. Η προσθήκη της $(k+1)$ ευθείας χωρίζει ακριβώς δύο από αυτά τα διακριτά μέρη σε δύο κομμάτια. Συνεπώς οι $k+1$ ευθείες διαχωρίζουν το επίπεδο σε $2k+2 = 2(k+1)$ διακριτά μέρη, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 8

α. Να προσδιοριστεί ποια ποσά ταχυδρομικών τελών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα αξίας 3 και 10 λεπτών.

β. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με μαθηματική επαγωγή. Να βεβαιωθείτε ότι διατυπώνετε ρητά την επαγωγική υπόθεση και το επαγωγικό βήμα.

γ. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με ισχυρή επαγωγή. Με ποιον τρόπο διαφέρει αυτή η απόδειξη από την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή?

α. $3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16$ και όλα τα ποσά από 18 λεπτά και πάνω.

β. Θεωρούμε $P(n)$ την πρόταση «μπορούμε να σχηματίσουμε ταχυδρομικό τέλος n λεπτών μόνο με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών». Θα δείξουμε με επαγωγή ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \geq 18$.
Βήμα βάσης: $18 = 3 \cdot 6$, άρα η $P(18)$ ισχύει.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(k)$. Τότε $k = 3 \cdot i + 10 \cdot j$, για κάποιους i, j ακέραιους. Αν $i \geq 3$, τότε μπορούμε να γράψουμε την ισότητα $k + 1 = 3 \cdot (i - 3) + 10 \cdot (j + 1)$. Αν $i < 3$, τότε το j πρέπει να είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του 2, αφού το βήμα βάσης είναι το 18. Άρα μπορούμα να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 10 λεπτών με 7 των 3 λεπτών, έχοντας πράγματι $k + 1 = 3 \cdot (i + 7) + 10 \cdot (j - 2)$.

γ. **Βήμα βάσης:** Θα δείξουμε ότι τα τέλη $18, 19$ και 20 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών (προφανώς το τέλος των 21 λεπτών φτιάχνεται εφόσον κάποιος χρησιμοποιήσει επιπλέον ένα γραμματόσημο των 3 λεπτών στο τέλος των 18 λεπτών). Πράγματι $19 = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 1, 20 = 2 \cdot 10$, ενώ την περίπτωση της $P(18)$ την δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $18 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 18$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k-2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 10 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i + 1) + 10 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα, χρησιμοποιώντας την ισχυρή επαγωγή έπρεπε να επεκτείνουμε το βήμα βάσης, αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $P(j)$ είναι αληθής για κάθε $18 \leq j \leq k$ δεν χρειάστηκε να πάρουμε περιπτώσεις για την ολοκλήρωση της απόδειξης.

Άσκηση 9

Να βρείτε το σφάλμα στην παρακάτω "απόδειξη" ότι κάθε ταχυδρομικό τέλος αξίας 3 ή περισσότερων λεπτών μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών.

Βήμα βάσης: Μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας 3 λεπτών με ένα γραμματόσημο αξίας 3 λεπτών και ένα τέλος αξίας 4 λεπτών με ένα γραμματόσημο αξίας 4 λεπτών.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας j λεπτών για κάθε μη αρνητικό ακέραιο j με $j \leq k$, χρησιμοποιώντας μόνο γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας $k+1$ λεπτών είτε αντικαθιστώντας ένα γραμματόσημο 3 λεπτών με ένα γραμματόσημο 4 λεπτών είτε αντικαθιστώντας 2 γραμματόσημα 4 λεπτών με 3 γραμματόσημα 3 λεπτών.

Το λάθος βρίσκεται στο ότι για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος χρησιμοποιείται υπόθεση που δεν δικαιολογείται από το βήμα βάσης. Για να αντικαταστήσουμε 1 γραμματόσημο των 3 λεπτών πρέπει το ελάχιστο τέλος να είναι 3 λεπτά, ενώ για να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 4 λεπτών πρέπει το ελάχιστο τέλος να είναι 8 λεπτά. Οι ενδιάμεσες τιμές δεν ελέγχθηκαν στο βήμα βάσης. Πράγματι, ενώ υπάρχει η δυνατότητα να σχηματιστούν τέλη των $4, 6$ και 7 λεπτών, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό για το τέλος των 5 λεπτών.

Για να επαναδιατυπωθεί σε σωστή βάση η πρόταση πρέπει να αλλάξει τόσο η πρόταση προς απόδειξη: "*Κάθε ταχυδρομικό τέλος αξίας 6 ή περισσότερων λεπτών μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών*" όσο και τα βήματα της επαγωγής

Βήμα βάσης: Θα δείξουμε ότι τα τέλη $6, 7$ και 8 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 4 λεπτών. Πράγματι $6 = 3 \cdot 2, 7 = 3 + 4, 8 = 4 \cdot 2$. $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$ αληθείς.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $6 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 6$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k-2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 4 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i+1) + 4 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Άσκηση 10

Έστω ότι S είναι το υποσύνολο του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών ακεραίων που ορίζονται αναδρομικά από τα βήματα:

Βήμα βάσης: $(0, 0) \in S$

Αναδρομικό βήμα: Αν $(a, b) \in S$ τότε το $(a, b+1) \in S$, $(a+1, b+1) \in S$ και $(a+2, b+1) \in S$.

α. Να παραθέσετε τα στοιχεία του S που παράγονται από τις 4 πρώτες εφαρμογές του αναδρομικού ορισμού.

β. Να χρησιμοποιήσετε την ισχυρή επαγωγή ως προς το πλήθος των εφαρμογών του αναδρομικού βήματος του ορισμού για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a, b) \in S$.

γ. Να χρησιμοποιήσετε τη δομική επαγωγή για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a, b) \in S$.

α. Εφαρμόζουμε τον τύπο 4 φορές:

Βάση	1η	2η	3η	4η
				$(0,4)$
			$(0,3)$	$(1,4)$
		$(0,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$
	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$
$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(3,3)$	$(4,4)$
	$(2,1)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$
		$(4,2)$	$(5,3)$	$(6,4)$
			$(6,3)$	$(7,4)$
				$(8,4)$

β. Θα δείξουμε με ισχυρή επαγωγή την πρόταση $P(n)$ "$a \leq 2b, \forall (a,b) \in S$ στην n-οστή εφαρμογή του αναδρομικού τύπου".

Βήμα βάσης: Η πρόταση $P(0)$ προφανώς ισχύει καθώς μόνο το $(0,0)$ είναι μέρος του συνόλου σε αυτήν την περίπτωση.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει $a \leq 2b$ για κάθε $(a,b) \in S$, εφόσον το S φτιάχτηκε με k ή λιγότερα αναδρομικά βήματα. Θεωρούμε ένα στοιχείο (a', b') που φτιάχτηκε με $k+1$ εφαρμογές του αναδρομκού βήματος. Επειδή η τελική εφαρμογή πρέπει να γίνει σε ένα στοιχείο (a,b) που κατασκευάστηκε με λιγότερες εφαρμογές του αναδρομικού τύπου, έχουμε για αυτό το στοιχείο $a \leq 2b$. Οπότε εφαρμόζοντας μια τελευταία φορά τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι $b' = b+1$ και $a' = a, a+1$ ή $a+2$. Σε κάθε περίπτωση $a' \leq 2b'$.

γ. Η υπόθεση ισχύει για το βήμα βάσης, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα. Αν ισχύει αυτό για το στοιχείο $(a, b) \in S$ τότε ισχύει επίσης και για κάθε στοιχείο που λαμβάνεται από το (a, b) με μια εφαρμογή του αναδρομικού τύπου, καθώς
$a \leq 2b \Rightarrow (a \leq 2(b+1)) \wedge (a+1 \leq 2(b+1)) \wedge (a+2 \leq 2(b+1))$.

Άσκηση 11

Θεωρούμε ότι μια πλάκα σοκολάτας αποτελείται από n τετραγωνάκια που είναι διατεταγμένα σε ορθογώνια διάταξη.

Η πλάκα ή μικρότερο ορθογώνιο κομμάτι της πλάκας μπορεί να σπάσει κατα μήκος της κατακόρυφης ή οριζόντιας γραμμής που χωρίζει τα τετραγωνάκια.

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε φορά μπορεί να σπάζει ένα κομμάτι, να προσδιοριστεί πόσα σπασίματα πρέπει να κάνουμε διαδοχικά για να σπάσουμε την πλάκα σε n ξεχωριστά τετραγωνάκια.

Η απάντηση να αποδειχτεί με ισχυρή επαγωγή.

Ισχυριζόμαστε ότι χρειάζονται ακριβώς $n-1$ σπασίματα για να σπάσει η πλάκα σε n τετραγωνάκια.

Βήμα βάσης: Αρχικά για $n=1$ είναι εμφανές ότι χρειάζονται $n-1=0$ σπασίματα.

Επαγωγικό βήμα: Θα προχωρήσουμε με υπόθεση ισχυρής επαγωγης για k κομμάτια ή λιγότερα. Θα αποδείξουμε ότι μια πλάκα με $k+1$ τετράγωνα χρειάζεται ακριβώς k σπασίματα.

Ξεκινάμε με ένα σπάσιμο που θα αφήσει 2 κομμάτια, εκ των οποίων το ένα θα έχει $i+1$ τετράγωνα, ενώ το άλλο θα έχει $k-i$ κομμάτια, ενώ ισχύει ότι $0 \leq i \leq k-1$. (Δηλαδή κάθε κομμάτι έχει τουλάχιστον 1 και μέχρι k κομμάτια). Από την υπόθεση ισχυρής επαγωγής θα έχουμε ότι το πρώτο κομμάτι θα χρειαστεί i σπασίματα για να γίνει $i+1$ κομμάτια, ενώ το δεύτερο κομμάτι θα χρειαστεί $k-i-1$ σπασίματα για να γίνει $k-i$ κομμάτια.

Συνολικά, προσθέτοντας το πρώτο σπάσιμο θα έχουμε $1+i+k-i-1=k$ σπασίματα ακριβώς, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 12

Ένα παζλ σχηματίζεται μέσω της διαδοχικής συνένωσης κομματιών που συγκροτούν μπλοκ. Μια κίνηση γίνεται κάθε φορά που ένα κομμάτι προστίθεται σε ένα μπλοκ ή όταν συνενώνονται δύο μπλοκ. Με τη χρήση της ισχυρής επαγωγής να αποδειχτεί ότι ανεξάρτητα από τον τρόπο εκτέλεσης των κινήσεων, χρειάζονται μόνο $n-1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ότι χρειάζονται μόνο $n-1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Βήμα βάσης: Προφανώς, η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(j)$ για κάθε $1 < j \leq k$. Η τελευταία κίνηση σχηματισμού ενός παζλ με $k+1$ κομμάτια πρέπει να είναι η συνένωση 2 μπλοκ μεγέθους m και $k+1-m$ κομμάτια αντίστοιχα, όπου $1 \leq m \leq k$. Από την επαγωγική υπόθεση, το μπλοκ με m κομμάτια απαιτεί για τον σχηματισμό του $m-1$ κινήσεις και το μπλοκ με $k+1-m$ κομμάτια, απαιτεί $k-m$ κινήσεις. Συνεπώς, για το σχηματισμό του παζλ με $k+1$ κομμάτια απαιτούνται $1+m-1+k-m=k$ κινήσεις, και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώνεται.