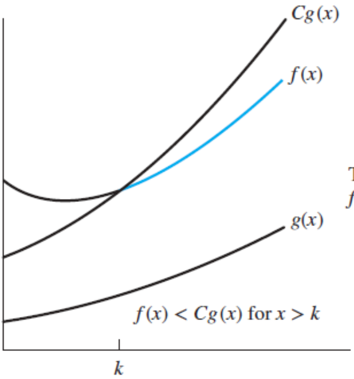
Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός



The part of the graph of $f(x)$ that satisfies $f(x) < Cg(x)$ is shown in color.

The function $f(x)$ is $O(g(x))$.

Άσκηση 1

Δώστε μια εκτίμηση για το μεγάλο-Ο των ακόλουθων συναρτήσεων.

a. $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$
b. $n^{2^n} + n^{n^2}$

- $f(n) = n\log(n^2+1) + n^2\log n$

  Παρατηρούμε ότι: $n\log(n^2+1) \leq n\log(2n^2)$, εφόσον $2n^2 > n^2+1$ για $n > 1$

  Συνεπώς: $f(n) \leq n\log(2n^2) + n^2\log n = n\log 2 + 2n\log n + n^2\log n$

  Ο τρίτος όρος αυξάνεται πιο γρήγορα και συνεπώς $f(n) = O(n^2\log n)$.

- b. $f(n) = n^{2^n} + n^{n^2} \leq n^{2^n} + n^{2^n} = 2n^{2^n}$ για $n > 5$

  καθώς παρατηρούμε ότι $n^2 < 2^n$ για $n > 5$.

  Συνεπώς $f(n) = O(n^{2^n})$.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η $f(n) = 2^n + 17$ είναι $O(3^n)$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η $f(n) = 2^n + 17$ είναι $O(3^n)$

Για $n > 5$, $2^n + 17 \leq 2^n + 2^n = 2 * 2^n \leq 2 * 3^n$

Αυτό δείχνει ότι η $f(n)$ είναι $O(3^n)$, (μάρτυρες $k = 5$ και $C = 2$).

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι α) η $x \log x$ είναι $O(x^2)$, αλλά β) η x^2 δεν είναι $O(x \log x)$

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι α) η $x \log x$ είναι $O(x^2)$, αλλά β) η x^2 δεν είναι $O(x \log x)$

α) Γνωρίζουμε ότι $x < 2^x \Leftrightarrow \log x < x$, για $x > 0$.

Άρα, $x \log x < x^2$ και συνεπώς $O(x^2)$ με μάρτυρες $C = 1, k = 0$.

β) Έστω ότι x^2 είναι $O(x \log x)$. Τότε υπάρχει C, k έτσι ώστε για κάθε $x > k$, $x^2 \leq Cx \log x$. Επιλέγουμε $n = \max(C, k)^2$.

Προφανώς ισχύει $n^2 \leq Cn \log n$ και $C \leq \sqrt{n}$.

Συνεπώς, $n^2 \leq \sqrt{n} \cdot n \cdot \log n \Leftrightarrow \dfrac{n}{\sqrt{n}} \leq \log n$

Καταλήξαμε στο αποτέλεσμα $\sqrt{n} \leq \log n$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 4

Έστω k θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι η $f(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ είναι $O(n^{k+1})$

Άσκηση 4

Έστω k θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι η $f(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ είναι $O(n^{k+1})$

$1^k + 2^k + \cdots + n^k \leq n^k + n^k + \cdots + n^k = n * n^k = n^{k+1}$.

Συνεπώς ισχύει ότι η $f(n)$ είναι $O(n^{k+1})$ με μάρτυρες $C = 1, \lambda = 1$

Άσκηση 5

1. Έστω $f(x) = O(g(x))$ όπου f και g αύξουσες και μη φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$
2. Έστω $f(x) = O(g(x))$. Προκύπτει ότι $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$;

Άσκηση 5

1. Έστω $f(x) = O(g(x))$ όπου f και g αύξουσες και μη φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$

1. Εφόσον f και g αύξουσες και μη φραγμένες, από την υπόθεση προκύπτει ότι υπάρχουν k και C τέτοια ώστε $f(x) \leq Cg(x)$ για $x > k$. Συνεπώς $\log(f(x)) \leq \log C + \log(g(x)) \leq \log(g(x)) + \log(g(x)) = 2\log(g(x))$, εφόσον η g δεν είναι φραγμένη, για κάποιο x_0 και $x > x_0, g(x) > C$. Συνεπώς $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$

Άσκηση 5

2. Έστω $f(x) = O(g(x))$. Προκύπτει ότι $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$;

2. Όχι. Αρκεί ένα αντιπαράδειγμα $f(x) = 2x$ και $g(x) = x$. Προφανώς ισχύει $f(x) = O(g(x))$.

   Ωστόσο, $2^{f(x)} = 2^{2x} = 4^x$ και $2^{g(x)} = 2^x$.

   Παρατηρούμε ότι για κάθε C, $f(x) > Cg(x)$,

   δηλαδή $4^x > C * 2^x \Leftrightarrow 2^x > C$, για $x > \log_2 C$.

   Συνεπώς, $2^{f(x)} \neq O(2^{g(x)})$

Άσκηση 6

Δείξτε ότι $n! \neq O(2^n)$.

Άσκηση 6

Δείξτε ότι $n! \neq O(2^n)$.

Απόδειξη με αντίφαση.

Έστω ότι υπάρχει C και k έτσι ώστε για κάθε $n > k$ να ισχύει $n! \leq C \cdot 2^n \Leftrightarrow \frac{n!}{2^n} \leq C$.

Ωστόσο, $\frac{n!}{2^n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

Τότε $\frac{n}{4} \leq \frac{n!}{2^n} \leq C$ που είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει αριθμός C για τον οποίο: $\frac{n}{4} \leq C, \forall n > k$, π.χ. $n = 5 \cdot C$

Άσκηση 7

Να τοποθετήσετε σε σειρά τις συναρτήσεις:

$$\sqrt{n}, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, n^2/1.000.000,$$

ώστε κάθε συνάρτηση να είναι μεγάλο-O της επόμενης.

Άσκηση 7

Να τοποθετήσετε σε σειρά τις συναρτήσεις:

$$\sqrt{n}, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, n^2/1000000,$$

ώστε κάθε συνάρτηση να είναι μεγάλο-O της επόμενης.

$1000 \log n, \sqrt{n}, n \log n, n^2/1.000.000, 2^n, 3^n, 2n!$

Η σειρά των 6 πρώτων συναρτήσεων είναι γνωστή από τη θεωρία. Θα αποδείξουμε ότι $m^n = O(2n!)$ για κάθε σταθερό $m > 0$.

$m^n = m^m * m^{n-m} < m^m * (m+1) * (m+2) \cdots * (m+n-m) =$
$m^m * (m+1) * (m+2) * \cdots * n$

$m^n < m^m * \dfrac{n!}{m!} = \dfrac{m^m}{m!} * n!$

Συνεπώς για κάθε m μπορούμε να επιλέξουμε μάρτυρες $C = \dfrac{m^m}{2m!}$ και $k = 1$ σύμφωνα με τον ορισμό του Μεγάλου-O ώστε για $n > k$, $m^n < \dfrac{m^m}{2m!} * 2n!$

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση n^n δεν είναι $O(n!)$.

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση n^n δεν είναι $O(n!)$.

Έστω ότι η συνάρτηση είναι $O(n!)$.

Τότε θα υπήρχαν k και C ώστε $n^n \leq C * n!$ για κάθε $n > k$

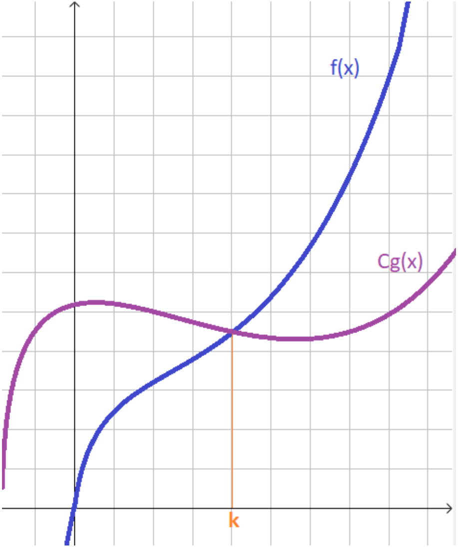
Ισοδύναμα, $\frac{n^n}{n!} \leq C$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{1}$.

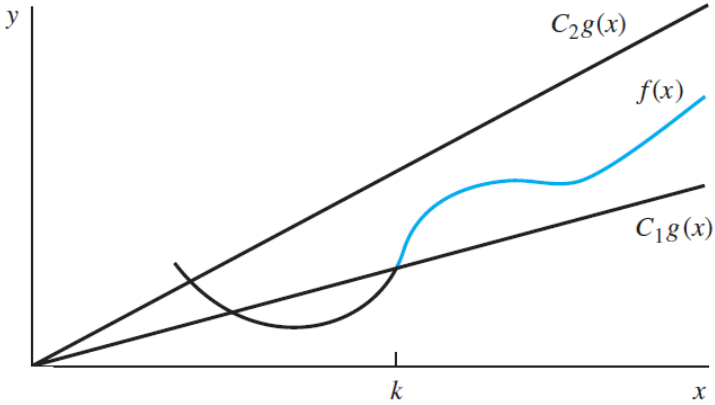
Αυτό είναι ένα γινόμενο του οποίου όλοι οι όροι πλην του τελευταίου είναι σίγουρα μεγαλύτεροι της μονάδας και ο τελευταίος όρος n.

Συνεπώς, $\frac{n^n}{n!} > n$. Τότε όμως ισχύει $n < \frac{n^n}{n!} \leq C$ για κάθε $n > k$, που είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει αριθμός C για τον οποίο $n < C$ για κάθε $n > k$.

(Προφανώς αν $k > C$. Αν $k \leq C$ μπορούμε να επιλέξουμε $n > k = C + 1$).



$$f(x) = \Omega(g(x))$$



$$f(x) = \Theta(g(x))$$

Άσκηση

Να αποδείξετε: α) ότι $f + g = \Theta(\max(f, g))$ και β) αν $f1 = \Theta(g1)$ και $f1 = \Theta(g2)$ τότε $f1 + f2 = \Theta(\max(g1, g2))$

α) Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{2}(f + g) \leq \max(f, g) \leq (f + g)$

Συνεπώς $\max(f, g) \leq (f + g) \leq 2\max(f, g)$, Όπερ έδει δείξαι.

β) Αναλόγως, αν $f1 = \Theta(g1)$ και $f1 = \Theta(g2)$ τότε $f1 + f2 = \Theta(\max(g1, g2))$

$c_1 g_1(x) \leq f_1(x) \leq C_1 g_1(x)$ και $c_2 g_2(x) \leq f_2(x) \leq C_2 g_2(x)$

Συνεπώς, $f_1(x) + f_2(x) \leq C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\max(g1, g2) = g1$.

Έπεται $f_1(x) + f_2(x) \leq C_1 g_1(x) + C_2 g_1(x) = (C_1 + C_2)\max(g1(x), g2(x))$ και $f1 + f2 = O(\max(g1, g2))$.

Επίσης, $f_1(x) + f_2(x) \geq c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \geq c_1 g_1(x) = c_1 \max(g1, g2)$

Συνεπώς $f1 + f2 = \Omega(\max(g1, g2))$ και $f1 + f2 = \Theta(\max(g1, g2))$

Άσκηση 9

Να τοποθετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά κατά τάξη:

$f_1(n) = n^2 + (\log(n))^2,$ $\quad f_2(n) = n^2 + n,$ $\quad f_3(n) = n^2 + \log(2^n) + 1,$

$f_4(n) = (n+1)^3 - (n-1)^3\,,$ $\quad f_5(n) = (n + \log(n))^2,$ $\quad f_6(n) = n^2 + 2^n,$

$f_7(n) = n^2 + 2^{100}$ $\quad f_8(n) = n^2 + 2^{2n},$ $\quad f_9(n) = n^2 + n!$

$f_{10}(n) = n^2 + 3^n$ $\quad f_{11}(n) = \left(n^2 + 1\right)^2$

Άσκηση 9

Να τοποθετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά κατά τάξη:

$$f_1(n) = n^2 + (\log(n))^2, \quad f_2(n) = n^2 + n, \quad f_3(n) = n^2 + \log(2^n) + 1,$$
$$f_4(n) = (n+1)^3 - (n-1)^3, \quad f_5(n) = (n + \log(n))^2, \quad f_6(n) = n^2 + 2^n,$$
$$f_7(n) = n^2 + 2^{100} \quad f_8(n) = n^2 + 2^{2n}, \quad f_9(n) = n^2 + n!$$
$$f_{10}(n) = n^2 + 3^n \quad f_{11}(n) = \left(n^2 + 1\right)^2$$

Από την μικρότερη στην μεγαλύτερη τάξη έχουμε τις εξής:

- $\Theta\left(n^2\right)$ για τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7$.
- $\Theta\left(n^4\right)$ για την συνάρτηση f_{11}.
- $\Theta\left(2^n\right)$ για την συνάρτηση f_6.
- $\Theta\left(3^n\right)$ για την συνάρτηση f_{10}.
- $\Theta\left(4^n\right)$ για την συνάρτηση f_8.
- $\Theta\left(n!\right)$ για την συνάρτηση f_9.

Άσκηση 10

Για κάθε μία από τις επόμενες παραστάσεις και κάθε ένα από τα σύμβολα O, Ω, Θ να εξετάσετε αν το σύμβολο μπορεί να αντικαταστήσει το $\square$ ώστε η πρόταση που προκύπτει να είναι αληθής.

	O	Ω	Θ
1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k} = \square(n^3)$			
2. $n^{\log n} = \square(2^{n \log n})$			
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \square(3^n)$			
4. $n \log^2 n = \square(n^2)$			
5. $n^n = \square(n!)$			
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \square(3^n)$			

1. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k} = n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{3} + \ldots + \frac{n^2}{n} \leq n^2 + n^2 + \ldots + n^2 = n * n^2 = n^3$.
   Συνεπώς $O(n^3)$.

   Επιπλέον, δεν είναι $f(n) = \Omega(n^3)$ το οποίο ισχύει ανν $n^3 = O(f(n))$.

   Απόδειξη με αντίφαση: $\exists c \exists n_0$ ώστε $n^3 \leq c \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k} = cn^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ για $n > n_0$. Ισχύει (ιδιότητες αρμονικών σειρών) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \log n$.
   Συνεπώς: $n^3 < cn^2(1 + \log n)$.

   Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $\log n > 1$.

   Τότε, $n^3 < 2cn^2 \log n$ ή $n < c \log n$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί γνωρίζουμε ότι $n \neq O(\log n)$. Προφανώς, $f(n) \neq \Theta(n^3)$.

2. $2^{n \log n} = n^n > n^{\log n}$. Συνεπώς $n^{\log n} = O(2^{n \log n})$ (μάρτυρες $c = 1, n_0 = 2$).

   Προφανώς, $n^{\log n} \neq \Omega(2^{n \log n}) = \Omega(n^n)$ (και συνεπώς ούτε και μεγάλο-Θ), διότι $log(n) \neq \Omega(n)$.

3. Θα βασιστούμε στην ταυτότητα $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.
   Προφανώς, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$.
   Συνεπώς, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0 = 4^n - 1$ και $\Omega(3^n)$.
   Προφανώς δεν ισχύει $O(3^n)$ και $\Theta(3^n)$
4. Από τη θεωρία ισχύει ότι $\log^2 n = O(n)$ και συνεπώς $n \log^2 n = O(n^2)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει επομένως δεν είναι $\Omega(n^2)$ και συνεπώς ούτε και μεγάλο-Θ.
5. $n^n \geq n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 1 = n!$. Συνεπώς, $n^n = \Omega(n!)$. Δεν ισχύει $n^n = O(n!)$. Λογαριθμίζουμε τις 2 πλευρές της ανισότητας $n^n \leq c * n!$: $\log n^n \leq \log(c * n!) \Leftrightarrow n \log n \leq \log c + \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1$. Εφόσον $\log 1 = 0$, έχουμε n λογαριθμικούς όρους από κάθε πλευρά. Για κάθε c αν λάβουμε $n > c$, τότε προφανώς $\log n^n > \log(c * n!)$, που είναι η άρνηση της πρότασης.
6. Βάσει της ταυτότητας του 3. προκύπτει $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$. Προφανώς είναι $O(3^n), \Omega(3^n), \Theta(3^n)$.

Άσκηση 11

Έστω f, g θετικές συναρτήσεις. Αποφασίστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $4n^2 + 5n - 9 = \Omega(10n^2)$
2. $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
3. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(g(n), f(n)))$

1. Αληθής. Για $c = \frac{1}{5}$, $n_0 = 2$, έχουμε $4n^2 + 5n - 9 \geq c(10n^2) = 2n^2, \forall n > n_0$
2. Αληθής. $n! \leq n^n \Leftrightarrow \log(n!) \leq n * \log n$. Συνεπώς, $\log(n!) = O(n \log n)$ (1).
   Για το Ω: $\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log i \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log i \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log \frac{n}{2} \geq$
   $\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} \log \sqrt{n} = \frac{1}{4} n \log n$ (αν $n > 4, n/2 > \sqrt{n}$).
   Συνεπώς, $\log(n!) = \Omega(n \log n)$ και από (1) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
3. Ψευδής. Υπάρχει προφανές αντιπαράδειγμα. Π.χ. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n$. Τότε $f(n) + g(n) = \Theta(n^2)$ και $\Theta(\min(g(n), f(n))) = \Theta(n)$

Άσκηση 12

Δώστε ένα παράδειγμα 2 συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}^+$ $f(n)$ και $g(n)$ για τις οποίες δεν ισχύει ούτε $f(n) = O(g(n))$ ούτε $g(n) = O(f(n))$.

Άσκηση 12

Δώστε ένα παράδειγμα 2 συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}^+$ $f(n)$ και $g(n)$ για τις οποίες δεν ισχύει ούτε $f(n) = O(g(n))$ ούτε $g(n) = O(f(n))$.

Έστω $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$f(n) = 0$, αν n περιττός

$f(n) = n^n$, αν n άρτιος

$g(n) = n$

Προφανώς δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει $f(n) \leq Cg(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει άρτιος $n > k$ ώστε $f(n) = n^n \geq C \cdot n \Leftrightarrow n^{n-1} \geq C$. (μη φραγμένη συνάρτηση)

Αντιστοίχως, δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει $g(n) \leq Cf(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει περιττός $n > k$ ώστε $g(n) = n \geq C \cdot 0 = 0$.

Άσκηση 13

Δώστε ένα παράδειγμα 2 **αυξουσών** συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}^+$ $f(n)$ και $g(n)$ για τις οποίες δεν ισχύει ούτε $f(n) = O(g(n))$ ούτε $g(n) = O(f(n))$.

Έστω $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$f(n) = (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)!$ και $g(n) = (2\lceil \frac{n}{2} \rceil)!$

Αν $n = 2m + 1$ **περιττός:**

$f(n) = (2\lfloor m + \frac{1}{2} \rfloor + 1)! = (2m + 1)!$

$g(n) = (2\lceil m + \frac{1}{2} \rceil)! = (2(m + 1))! = (2m + 2)!$

Αν $n = 2m$ **άρτιος:**

$f(n) = (2m + 1)!$, $g(n) = (2m)!$

Προφανώς δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει

$f(n) \leq Cg(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει άρτιος $n = 2m > k$ ώστε

$f(n) = (2m + 1)! \geq C \cdot (2m)! \Leftrightarrow \frac{(2m+1)!}{(2m)!} \geq C \Leftrightarrow (2m + 1) \geq C \Leftrightarrow n \geq C - 1.$

Αντιστοίχως, δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει

$g(n) \leq Cf(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει περιττός $n = 2m + 1 > k$ ώστε

$g(n) = (2m + 2)! \geq C \cdot (2m + 1)! \Leftrightarrow \frac{(2m+2)!}{(2m+1)!} \geq C \Leftrightarrow (2m + 2) \geq C \Leftrightarrow n \geq C - 1.$