Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024

Αποδείξεις: Μέθοδοι αποδείξεων και στρατηγική

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, αν και μόνο αν ο αριθμός $7n+4$ είναι άρτιος.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, **αν και μόνο αν** ο αριθμός 7n+4 είναι άρτιος.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε ο 7n+4 είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n είναι άρτιος. Τότε n =2k για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι 7n+4=2(7k+2), που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι άρτιος αριθμός.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν ο 7n+4 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n δεν είναι άρτιος, δηλαδή έστω n περιττός. Τότε n =2k+1 για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι 7n+4=2(7k+5)+ 1, που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι περιττός αριθμός, κάτι που αντιβαίνει την υπόθεση μας.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Μπορούμε γρήγορα να περιορίσουμε την απόδειξη στον έλεγχο ορισμένων απλών περιπτώσεων, αφού αν $|y| \geq 2$ τότε $2x^2 + 5y^2 \geq 20 > 14$. Άρα αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις όπου το y είναι ίσο με -1,0 ή 1.

- Αν y=0 τότε έχουμε $x^2 = 7$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.
- Αν $|y| = 1$ τότε έχουμε $2x^2 = 9$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.

'Αρα, δεν είναι δυνατόν η εξίσωση $2x^2 + 5y^2 = 14$ να έχει ακέραιες λύσεις.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.
- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.
- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.

Λάθος. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.
Αν εξετάσουμε τον αριθμό 7 έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Κανένα τετράγωνο: ο αριθμός 7 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ένα τετράγωνο:
$1^2 + 6 = 7$ Το 6 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 3 = 7$ Το 3 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Δύο τετράγωνα:
$1^2 + 1^2 + 5 = 7$ Το 5 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 1^2 + 2 = 7$ Το 2 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.

Σωστό. $5^2 + 5^2 = 50$ και $1^2 + 7^2 = 50$

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Καταρχάς θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι άρρητος αριθμος με απαγωγή σε άτοπο (με αντίφαση).

Έστω ότι το άθροισμα s ενός ρητού αριθμού r και ενός άρρητου αριθμού i είναι ρητός αριθμός. Τότε και το άθροισμα των ρητών αριθμών s και -r θα είναι ρητό. Όμως $s + (-r) = i$ και καταλήξαμε σε άτοπο.

Ο μέσος όρος των αριθμών r και i είναι $\frac{(r+i)}{2}$, που βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος είναι άρρητος.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με απαγωγή σε άτοπο (απόδειξη με αντίφαση). Έστω μία αίθουσα με 49 άτομα στην οποία δεν υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα. Άρα για κάθε έναν από τους 12 μήνες, το πολύ 4 άτομα στην αίθουσα έχουν γενέθλια αυτόν τον μήνα. Συνεπώς η αίθουσα έχει το πολύ 48 άτομα, καταλήγοντας σε αντίφαση στην υπόθεση ότι η αίθουσα έχει 49 άτομα.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλαμβάνετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλάβετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Έστω ότι καταλήγουμε σε 9 μηδενικά. Αυτό σημαίνει ότι στο προηγούμενο βήμα είχαμε 9 ίσα bits (είτε 0 είτε 1).

-Για να έχουμε 9 μηδενικά θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να είχαμε ίσα bits.

- Εφόσον ξεκινάμε με κάτι διαφορετικό από 9 μηδενικά και καταλήγουμε σε 9 μηδενικά θα πρέπει σε κάποιο βήμα να είχαμε 9 μονάδες.

-Για να έχουμε 9 μονάδες θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να εναλλάσονται τα bits (0101...). Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ξεκινάμε με περιττό πλήθος bits εφόσον αναγκαία δύο μονάδες θα ήταν συνεχόμενες στον κύκλο (101010101).

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Αν κάποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι μηδέν τότε προκύπτει το ζητούμενο.

Αν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, προφανώς το γινόμενο δύο από αυτούς είναι θετικό.

Αν δεν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, επειδή τα πρόσημα είναι δύο, δύο από τους αριθμούς θα έχουν διαφορετικά πρόσημα και ο τρίτος θα έχει αναγκαία το ίδιο πρόσημο με έναν από τους δύο πρώτους. Το γινόμενο των δύο αριθμών που έχουν το ίδιο πρόσημο είναι θετικό.

Εισαγωγή στα Σύνολα - Πράξεις Συνόλων

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

1. $A = \{5n : n \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$
3. $C = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$
4. $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } n \in \mathbb{Z}\}$
5. $E = \{-5, 0, 5, 10\}$

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

1. $A = \{5n : n \in \mathbb{R}\}$

Προφανώς τα σύνολα δεν είναι ίσα γιατί το σύνολο A περιέχει πραγματικούς αριθμούς.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

2. $B = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα είναι ίσα, εφόσον η παραπάνω σημειογραφία εκφράζει ακριβώς το σύνολο των ακεραίων που περιγράφει η εκφώνηση.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

3. $C = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα είναι ίσα, εφόσον η παραπάνω σημειογραφία εκφράζει κι αυτή ακριβώς το σύνολο των ακεραίων που περιγράφει η εκφώνηση.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

4. $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } n \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα δεν είναι ίσα. Στον παραπάνω ορισμό του συνόλου D δεν προσδιορίζεται το σύνολο στο οποίο ανήκει ο αριθμός k. Αν υποθέσουμε ότι ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορούμε να επιλέξουμε ότι $k = 1/5$, συνεπώς $n = 1$ που **δεν** είναι πολλαπλάσιο του 5. Έτσι βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

5. $E = \{-5, 0, 5, 10\}$

Προφανώς, τα σύνολα δεν είναι ίσα εφόσον το σύνολο E δεν περιέχει λ.χ. τον ακέραιο αριθμό 15 που ανήκει στα πολλαπλάσια του 5.

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο A και ποια είναι αυτά;
2. Ποια είναι τα υποσύνολα του συνόλου A;

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1. Πόσα στοιχεία περιέχει το σύνολο A και ποια είναι αυτά;

Έχει δύο στοιχεία: $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$. Δηλαδή το κενό σύνολο και ένα σύνολο που έχει ως μοναδικό στοιχείο το κενό σύνολο.

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

2. Ποια είναι τα υποσύνολα του συνόλου A;

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Άσκηση 3

Έστω $S = \{2, 3, \{2\}, \{4\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $2 \in S$
2. $\{2\} \in S$
3. $\{2\} \subset S$
4. $\{\{2\}\} \subset S$
5. $3 \in S$
6. $\{3\} \in S$
7. $\{3\} \subset S$
8. $\{\{3\}\} \subset S$
9. $4 \in S$
10. $\{4\} \in S$
11. $\{4\} \subset S$
12. $\{\{4\}\} \subset S$

Άσκηση 3

Έστω $S = \{2, 3, \{2\}, \{4\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $2 \in S$ Σ
2. $\{2\} \in S$ Σ
3. $\{2\} \subset S$ Σ
4. $\{\{2\}\} \subset S$ Σ
5. $3 \in S$ Σ
6. $\{3\} \in S$ Λ
7. $\{3\} \subset S$ Σ
8. $\{\{3\}\} \subset S$ Λ
9. $4 \in S$ Λ
10. $\{4\} \in S$ Σ
11. $\{4\} \subset S$ Λ
12. $\{\{4\}\} \subset S$ Σ

Άσκηση 4

Έστω $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $\{1\} \in A$
2. $\{1\} \subseteq A$
3. $\{\{1\}\} \in A$
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$
5. $2 \in A$
6. $2 \subseteq A$
7. $\{2\} \in A$
8. $\{2\} \subseteq A$

Άσκηση 4

Έστω $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $\{1\} \in A$ Σ
2. $\{1\} \subseteq A$ Σ
3. $\{\{1\}\} \in A$ Λ
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$ Σ
5. $2 \in A$ Σ
6. $2 \subseteq A$ Λ
7. $\{2\} \in A$ Λ
8. $\{2\} \subseteq A$ Σ

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

1. $\{2, 4, \ldots, 12\}$
2. $\{1, 3, \ldots, 31\}$
3. $\{2, 5, \ldots, 32\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

1. $\{2, 4, \ldots, 12\}$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ και } 1 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{N}\}$

$\{n + 1 : n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

2. $\{1, 3, \ldots, 31\}$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$ και $0 \leq k \leq 15, k \in \mathbb{N}\}$

$\{2n + 1 : n \in \{0, 1, 2, \ldots, 15\}\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

3. $\{2, 5, \ldots, 32\}$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αριθμών μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$2 + 3 * 0, 2 + 3 * 1, 2 + 3 * 2, \ldots, 2 + 3 * 10$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } 0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N}\}$

$\{3n + 2 : n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}\}$

Άσκηση 6

Πόσα στοιχεία περιέχουν τα παρακάτω σύνολα:

1. $A = \emptyset$
2. $B = \{\emptyset\}$
3. $C = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$
4. $D = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, A\}$
5. $E = \{0, \{\{1, \{3, 5\}, \{4, 5, 7\}, 8\}\}\}$

Άσκηση 6

Πόσα στοιχεία περιέχουν τα παρακάτω σύνολα:

1. $A = \emptyset$ 0
2. $B = \{\emptyset\}$ 1
3. $C = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ 2
4. $D = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, A\}$ 7
5. $E = \{0, \{\{1, \{3, 5\}, \{4, 5, 7\}, 8\}\}\}$ 2

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

1. $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$
2. $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ και $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$
3. $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 3\}\}$ και $\{\{3, 5, 1\}, \{6, 2, 2, 4, 6\}, \{2, 4, 2, 6\}\}$
4. $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ και $\{\{3, 5, 1\}, \{2, 4, 6\}, \{4, 6\}\}$
5. $\emptyset$ και $\{x \in \mathbb{N} : x > 1$ και $x^2 = x\}$
6. $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

1. $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$

Το δεύτερο σύνολο περιέχει στοιχεία που επαναλαμβάνονται περισσότερες από μία φορές. Το δεύτερο σύνολο θα μπορούσε να αναπαρασταθεί και ως $\{0, 1, 2\}$ και συνεπώς είναι ίσο με το πρώτο, εφόσον περιέχουν τα ίδια στοιχεία.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

2. $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ και $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα. Λ.χ. το στοιχείο 3 περιέχεται μόνο στο πρώτο σύνολο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

3. $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{5,1,3\}\}$ και $\{\{3,5,1\},\{6,2,2,4,6\},\{2,4,2,6\}\}$

Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν διπλότυπα. Στο πρώτο σύνολο το στοιχείο $\{1,3,5\}$ είναι ίδιο με το στοιχείο $\{5,1,3\}$ εφόσον η σειρά των στοιχείων δεν παίζει ρόλο. Συνεπώς το πρώτο σύνολο περιέχει δύο στοιχεία. Αντιστοίχως, στο δεύτερο σύνολο τα στοιχεία $\{6,2,2,4,6\},\{2,4,2,6\}$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο $\{2,4,6\}$. Συνεπώς και το δεύτερο σύνολο περιέχει 2 στοιχεία, τα $\{1,3,5\}$ και $\{2,4,6\}$. Επομένως, τα σύνολα είναι ίσα.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

4. $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$ και $\{\{3,5,1\},\{2,4,6\},\{4,6\}\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα καθώς το δεύτερο περιέχει το στοιχείο $\{4,6\}$ που δεν περιέχεται στο πρώτο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

5. $\emptyset$ και $\{x \in \mathbb{N} : x > 1 \text{ και } x^2 = x\}$

Για να βρούμε τα στοιχεία που περιέχονται στο δεύτερο σύνολο θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = x$. Η εξίσωση αυτή έχει τις προφανείς λύσεις $x = 0$ ή $x = 1$. Ωστόσο, εφόσον $x > 1$, η εξίσωση που προσδιορίζει τα στοιχεία του συνόλου δεν έχει καμία λύση και συνεπώς το σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Άρα, είναι το κενό σύνολο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

6. $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα. Το 2ο έχει ένα στοιχείο, το κενό σύνολο, που δεν περιέχεται στο πρώτο.

Άσκηση 8

Έστω τα σύνολα:
$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

Είναι οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των συνόλων σωστές και γιατί;

1. $C \subseteq A$
2. $A \neq B$
3. $B \neq C$
4. $A \neq C$
5. $C \subset A$

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

1. $C \subseteq A$ Σωστό

Έστω τυχαίο στοιχείο m του συνόλου C. Τότε από την περιγραφή του συνόλου προκύπτει ότι $m = 6k - 4$ για κάποιο $k \geq 1 \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να γράψουμε $m = 3(2k) - 6 + 2 = 3(2k - 2) + 2$. Έστω $\lambda = 2k - 2 = 2(k - 1)$. Εφόσον, $k \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 6k - 4 = 3\lambda + 2$. Άρα οποιοδήποτε στοιχείο m του C ανήκει και στο σύνολο A και το σύνολο C είναι υποσύνολο του A.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$

2. $A \neq B$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι τα στοιχεία n του συνόλου B, $n \geq 24$. Το σύνολο A όμως περιέχει το στοιχείο 2 για $k = 0$, το οποίο προφανώς δεν περιέχεται στο σύνολο B και συνεπώς τα σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

3. $B \neq C$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι τα στοιχεία n του συνόλου B, $n \geq 24$. Το σύνολο C όμως περιέχει το στοιχείο 2 για $k = 1$, το οποίο προφανώς δεν περιέχεται στο σύνολο B και συνεπώς τα σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

4. $A \neq C$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι το σύνολο A περιέχει το στοιχείο 5 για $k = 1$. Το μικρότερο στοιχείο του C για $k = 1$ είναι το 2. Για τα υπόλοιπα στοιχεία ισχύει $n \geq 8$ και συνεπώς το στοιχείο 5 δεν περιέχεται στο στοιχείο C. Άρα τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

5. $C \subset A$ Σωστό

Στο ερώτημα 1 δείξαμε ότι $C \subseteq A$. Στο ερώτημα 4 δείξαμε ότι $C \neq A$. Συνεπώς, το σύνολο C είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου A.