# Τριπλά Ολοκληρώματα

## Απλά Σύνολα στον $\mathbb{R}^3$ :

- xy-απλό , $B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b \, , \, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \, ,$
$h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y) \}$

όπου $\varphi_1, \varphi_2, h_1, h_2$ συνεχείς και

$D = \{ (x,y) : a \le x \le b \, , \, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \}$ δηλαδή η προβολή του B στο επίπεδο xy είναι x-απλό σύνολο.

- Ανάλογα , yx-απλό , xz , zx , yz , zy-απλό .

**Θεώρημα Fubini** : Αν $f : B \to \mathbb{R}$ συνεχής με B xy-απλό τότε

$$\exists \iiint_B f = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$$

**Όγκος** : $V_B = \iiint_B 1$ σε καρτεσιανές

$V_B = \iiint_B r$ σε κυλινδρικές

$V_B = \iiint_B r^2 \cdot \sin\varphi$ σε σφαιρικές

Κάποιες επιφάνειες :

i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=a^2\}$ $(a>0)$ Σφαίρα

ii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=\beta^2\}$ $(\beta>0)$ Κύλινδρος

iii) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=c(x^2+y^2)\}$ $(c\neq 0)$ Παραβολοειδές

iv) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2=c(x^2+y^2)\}$ $(c>0)$ Κώνος (διπλός)

## Άσκηση 1

$B = \{(x,y,z) : (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 \leq 1\}$ σφαίρα κέντρου $(a_1, a_2, a_3)$ και μοναδιαίας ακτίνας.

Να υπολογισθεί ο όγκος της σφαίρας αυτής.

### Λύση

Παρατηρούμε ότι το που βρίσκεται το κέντρο της σφαίρας δεν αλλάζει τον όγκο της, οπότε θα υπολογίσουμε τον όγκο για την $B_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

i) Σε καρτεσιανές

$$B_1 = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1 ,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} ,\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$$V(B_1) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2 \cdot \sqrt{1-x^2-y^2} \, dy \, dx$$

(Υπενθύμιση: $\int \sqrt{\beta^2 - y^2} \, dy = \frac{1}{2} \cdot \left( \beta^2 \cdot \arcsin \frac{y}{\beta} + y \cdot \sqrt{\beta^2 - y^2} \right)$)

άρα $V(B_1) = \frac{4\pi}{3}$

ii) Σε κυλινδρικές, $x = r\cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$, $z = z$

$x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow r^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = 1 - r^2$, $r \in [0,1]$ και $\theta \in [0, 2\pi)$

$$V(B_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \cdot dz \, dr \, d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

iii) Σε σφαιρικές, $x=r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi$ , $y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$ , $z=r\cdot\cos\varphi$

$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow 0\leq r\leq 1$ και $\theta\in[0,2\pi)$ και

$\varphi\in[0,\pi]$

$$V(B_1)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2\cdot\sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

## Άσκηση 2

Να βρεθεί ο όγκος $V(\mathcal{E})$ όπου $\mathcal{E}=\left\{(x,y,z): \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\leq 1\right\}$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$

Λύση

Θέτουμε $x_1=\frac{x}{\alpha}$, $y_1=\frac{y}{\beta}$, $z_1=\frac{z}{\gamma}$ δηλαδή έχουμε τον μετασχηματισμό $\vec{T}(x_1,y_1,z_1)=(\alpha x_1, \beta y_1, \gamma z_1)$ και

$$\det J_{\vec{T}}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,y_1,z_1)}=\alpha\beta\gamma$$

Άρα $\mathcal{E}^*=\left\{(x_1,y_1,z_1): x_1^2+y_1^2+z_1^2\leq 1\right\}$

$$V(\mathcal{E})=\iiint_{\mathcal{E}^*}\alpha\beta\gamma\, dx_1\, dy_1\, dz_1=\alpha\beta\gamma\cdot\frac{4\pi}{3}$$ (από ασκ. 1)

## Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα $I=\iiint_B (x^2+y^2)\,dV$ και $J=\iiint_B \sqrt{z}\,dV$

όπου $B=\{(x,y,z):\ z\geq\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

## Λύση

Κυλινδρικές $x=r\cdot\cos\theta$, $y=r\cdot\sin\theta$, $z=z$

Τότε $z\geq\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z\geq r$ και $x^2+y^2+z^2\leq 1\Rightarrow$

$$\Rightarrow z\leq\sqrt{1-r^2}$$

δηλαδή $r\leq z\leq\sqrt{1-r^2}$ και για να έχουμε $r\leq\sqrt{1-r^2}$ πρέπει $0\leq r\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\theta\in[0,2\pi)$ οπότε

$$B^*=\left\{(r,\theta,z):\ 0\leq\theta<2\pi,\ 0\leq r\leq\frac{1}{\sqrt{2}},\ r\leq z\leq\sqrt{1-r^2}\right\}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} r\cdot r^2\,dz\,dr\,d\theta=\frac{1}{30}\cdot(8-5\sqrt{2})\pi$$

$$J=\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{z}\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=-\frac{4}{21}\left(\sqrt[4]{2}-2\right)\pi$$

## Άσκηση 4

Να υπολογισθεί το $I = \iiint\limits_B (1-4x^2-9y^2-z^2)\, dV$ όπου

$B = \{ (x,y,z) : 4x^2+9y^2+z^2 \leq 1 \}$

## Λύση

Θέτω $x_1 = 2x$, $y_1 = 3y$, $z_1 = z$ δηλαδή μετασχηματισμός

$\vec{T}(x_1, y_1, z_1) = \left( \frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{3}, z_1 \right)$ με ορίζουσα του

Ιακωβιανού του $= 1/6$

και $B^* = \{ (x_1, y_1, z_1) : x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq 1 \}$

$I = \iiint\limits_{B^*} (1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) \cdot \frac{1}{6}\, dV$ και σε σφαιρικές συντετ.

$$I = \frac{1}{6} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} (1-r^2) \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{4\pi}{45} .$$

## Άσκηση 5

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iiint\limits_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq (1-\varepsilon)^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\cdot(1-x^2-y^2-z^2)}}$$

$(0<\varepsilon<1)$.

## Λύση

Σε σφαιρικές $I_\varepsilon = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{r^2 \cdot \sin\varphi}{\sqrt{r^2\cdot(1-r^2)}}\, dr\, d\varphi\, d\theta =$

$$= 4\pi \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = 4\pi \cdot \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} = 4\pi\left[\sqrt{1-\varepsilon^2} - \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 4\pi .$$

## Άσκηση 6

Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ το $I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iiint\limits_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 < 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} \in \mathbb{R}$ ;

$(0 < \varepsilon < 1)$

## Λύση

Σε σφαιρικές $I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{r^2 \cdot \sin\varphi}{r^{2\lambda}} \, dr \, d\varphi \, d\theta =$

$$= 4\pi \cdot \int_\varepsilon^1 r^{2-2\lambda} \, dr =$$

$$= \begin{cases} 4\pi \cdot \left. \frac{r^{3-2\lambda}}{3-2\lambda} \right|_\varepsilon^1 & \text{για } \lambda \neq 3/2 \\ 4\pi \cdot \ln r \Big|_\varepsilon^1 & \text{για } \lambda = 3/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4\pi \cdot \frac{1}{3-2\lambda} \cdot \left(1 - \varepsilon^{3-2\lambda}\right) & \text{για } \lambda \neq 3/2 \\ -4\pi \cdot \ln\varepsilon & \text{για } \lambda = 3/2 \end{cases}$$

$(0 < \varepsilon < 1)$

Άρα $\exists$ το $\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon \iff 3 - 2\lambda > 0 \iff \lambda < \frac{3}{2}$ .