Αλλαγή Μεταβλητών

(Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς)

$f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

$\varphi : [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ C^1, $\varphi'(t) \neq 0$ και επειδή φ και συνεχής τότε φ γνήσια μονότονη, $t \in [\gamma, \delta]$, επί.

Τότε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \overset{x=\varphi(t)}{=\!=} \int_\gamma^\delta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,dt$

όμως $(\varphi'(t)) = J_\varphi(t)$ (ο Ιακωβιανός πίνακας της φ)

οπότε $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)|\,dt$.

Άρα, όταν εφαρμόζουμε έναν μετασχηματισμό στη συνάρτηση f που ολοκληρώνουμε, τότε πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με το απόλυτο της ορίζουσας του Ιακωβιανού πίνακα του μετασχηματισμού αυτού.
(Φυσικά, για να ορίζεται ο μετασχηματισμός αυτός πρέπει η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακά του να είναι $\neq 0$.)

Πολικός Μετασχηματισμός

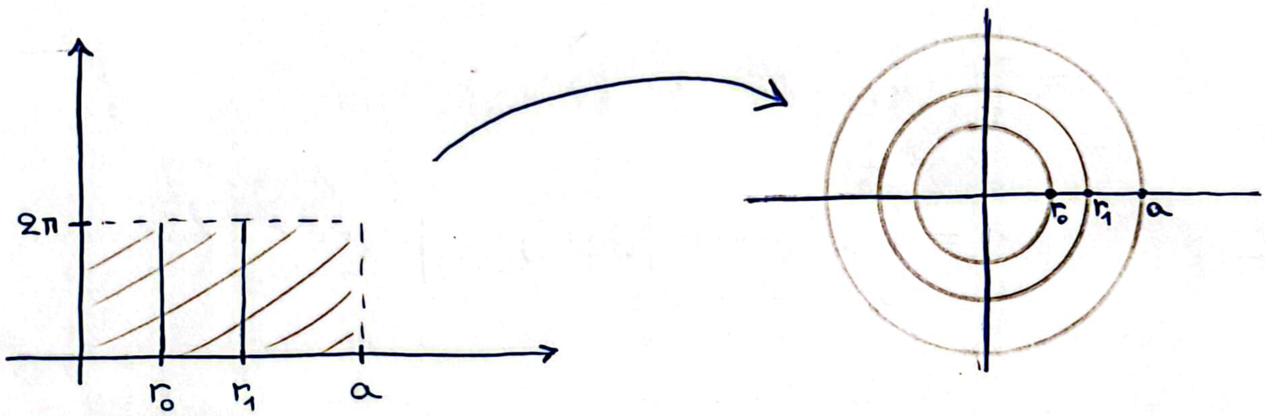
(χρησιμοποιείται κυρίως όταν υπάρχει κάποια κυκλική συμμετρία στο πρόβλημα)

$\vec{T}(r,\theta) = (r\cdot\cos\theta\ ,\ r\cdot\sin\theta)\ ,\ r\in(0,+\infty)\ ,\ \theta\in[0,2\pi)$

επί του $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, C^1 , 1-1 .

Δηλαδή, αν x και y οι αρχικές μεταβλητές της συνάρτησης, τις θέτουμε $x = r\cdot\cos\theta$ και $y = r\cdot\sin\theta$

(r ακτίνα , θ γωνία και βλέπουμε ότι $x^2+y^2=r^2$, $\frac{y}{x}=\tan\theta$)



Ο Ιακωβιανός πίνακας του μετασχηματισμού $\vec{T}(r,\theta)$ είναι:

$$J_{\vec{T}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{pmatrix}$$

και $\det J_{\vec{T}} = r\cdot\cos^2\theta + r\cdot\sin^2\theta = r\cdot(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$.

Θ. Αλλαγής Μεταβλητής για Διπλό Ολοκλήρωμα

$f : \underset{(x,y)}{D} \to \mathbb{R}$, D x-απλό , f συνεχής

Μετασχηματισμό $\vec{T} : \underset{(u,v)}{D^*} \longrightarrow \underset{(x,y)}{D}$ C^1, 1-1, επί και

$\det J_{\vec{T}}(u,v) \neq 0$

(D^* u-απλό)

Τότε $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\vec{T}(u,v)) \cdot \left|\det J_{\vec{T}}(u,v)\right| du\,dv .$$

Συμβολισμός : $J_{\vec{T}}(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Άσκηση 1

Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών να υπολογισθούν τα παρακάτω διπλά ολοκληρώματα.

(i) $\iint_D \cos(x+y)\cdot e^{x-y}\,dx\,dy$ όπου $D: |x-y| \leq 1$, $|x+y| \leq \frac{\pi}{2}$

(ii) $\iint_D \exp\left(\sqrt{|x+y|}\right) dx\,dy$ όπου $D: 0 \leq x \leq 2$, $|x+y| \leq 2$

(εδώ $\exp u := e^u$)

Λύση

(i) Οι ανισότητες γράφονται: $-1 \leq x-y \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}$

Έτσι τα σύνορα του τόπου είναι $x-y=-1$, $x-y=1$, $x+y=-\frac{\pi}{2}$, $x+y=\frac{\pi}{2}$

και επειδή βλέπουμε ότι $x+y$, $x-y$ εμφανίζονται τόσο στη συνάρτηση όσο και στις εξισώσεις των συνόρων,

θέτουμε $x-y=u$, $x+y=v$

άρα $x=\frac{u+v}{2}$ και $y=\frac{v-u}{2}$ και σύνορα: $u=-1$, $u=1$, $v=-\frac{\pi}{2}$, $v=\frac{\pi}{2}$

Ιακωβιανός $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

άρα $\det J = 1/2 = |\det J|$

Οπότε $\iint_D \cos(x+y)\cdot e^{x-y}\,dx\,dy = \iint_{D^*} \cos v \cdot e^u \cdot |\det J|\,du\,dv =$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-1}^{1} \cos v \cdot e^u \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \cdot \left[e^{u}\right]_{-1}^{1} dv = \frac{e-e^{-1}}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv = \frac{e-e^{-1}}{2} \cdot \left[\sin v\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= e - e^{-1}$$

(ii) Ο τόπος D καθορίζεται από τις σχέσεις:

$$0 \leq x \leq 2 \quad , \quad -2 \leq x+y \leq 2$$

Θέτω $x+y=u$ και $x=v$

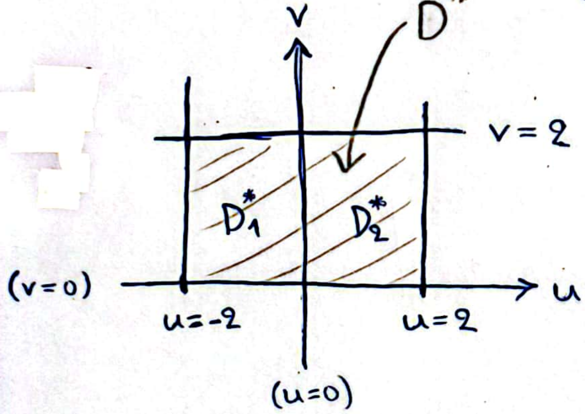
άρα $x=v$ και $y=u-v$ και $D^{*}=\{(u,v) : -2 \leq u \leq 2 \ , \ 0 \leq v \leq 2\}$

Ιακωβιανός $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ και

$$\det J = -1 \implies |\det J| = 1$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\iint_D \exp(\sqrt{|x+y|})\, dx\, dy = \iint_{D^*} \exp(\sqrt{|u|}) \cdot |\det J|\, du\, dv = \iint_{D^*} e^{\sqrt{|u|}}\, du\, dv$$



Στο D_1^{*} $u<0$ άρα $|u|=-u$

Στο D_2^{*} $u>0$ άρα $|u|=u$

οπότε $\iint_{D^*} e^{\sqrt{|u|}}\, du\, dv = \iint_{D_1^*} e^{\sqrt{-u}}\, du\, dv + \iint_{D_2^*} e^{\sqrt{u}}\, du\, dv =$

$$= \int_{-2}^{0}\int_{0}^{2} e^{\sqrt{-u}}\, dv\, du + \int_{0}^{2}\int_{0}^{2} e^{\sqrt{u}}\, dv\, du =$$

$$= \int_{-2}^{0} e^{\sqrt{-u}} \int_{0}^{2} dv\, du + \int_{0}^{2} e^{\sqrt{u}} \int_{0}^{2} dv\, du =$$

$$= 2\cdot\int_{-2}^{0} e^{\sqrt{-u}}\, du + 2\cdot\int_{0}^{2} e^{\sqrt{u}}\, du = I_1 + I_2$$

$I_2 = 2\cdot\int_{0}^{2} e^{\sqrt{u}}\, du$ και θέτω $\sqrt{u} = t \Rightarrow u = t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt$

άρα $I_2 = 2\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}} e^{t}\cdot 2t\, dt = 4\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}} e^{t}\cdot t\, dt = 4\left(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{2}} + 1\right)$

και $I_1 = 2\int_{-2}^{0} e^{\sqrt{-u}}\, du$ και θέτω $\sqrt{-u} = t \Rightarrow -u = t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow du = -2t\,dt$

άρα $I_1 = 2\cdot\int_{\sqrt{2}}^{0} e^{t}\cdot(-2t)\, dt = 4\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}} e^{t}\cdot t\, dt = 4\left(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{2}} + 1\right)$

Οπότε $I = I_1 + I_2 = 8\cdot\left(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{2}} + 1\right)$.

Άσκηση 2

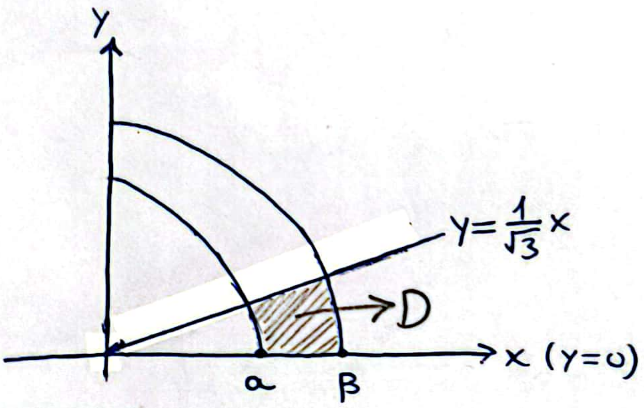
Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(i) $I_1 = \iint_D \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$ όπου D το 1^o τεταρτημόριο του $x-y$ που φράσσεται από τις $x^2+y^2=\alpha^2$, $x^2+y^2=\beta^2$ $(0<\alpha<\beta)$ και $y=0$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

(ii) $I_2 = \iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ όπου D 1^o τεταρτημόριο του $x-y$ που φράσσεται από τις $x^2+y^2=\alpha^2$, $x^2+y^2=\beta^2$ $(0<\alpha<\beta)$.

Λύση

(i) $D = \left\{(x,y) : \alpha^2 \le x^2+y^2 \le \beta^2 ,\ 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}}x \right\}$



Εφαρμόζω πολικό μετασχηματισμό

$x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\theta$

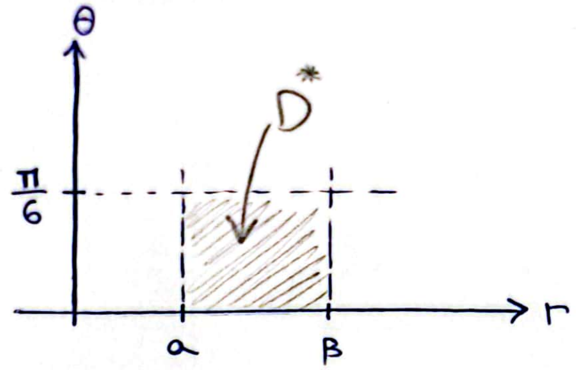
$\left(y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow r\cdot\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cdot\cos\theta \Rightarrow \right.$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\left. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \right)$

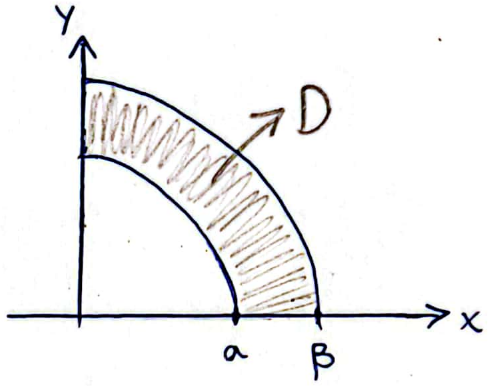
και $x^2+y^2=r^2$ άρα $\alpha^2 \le r^2 \le \beta^2$ οπότε $\alpha \le r \le \beta$

και $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$ δηλαδή $D^* = \left\{(r,\theta) : \alpha \le r \le \beta ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}\right\}$



$$I_1 = \int_\alpha^\beta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(r^2)\cdot r \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{6}\cdot\left[-\frac{\cos(r^2)}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{\pi}{12}\left(\cos(\alpha^2)-\cos(\beta^2)\right)$$

(ii)



$$D = \{(x,y) : \alpha^2 \leq x^2+y^2 \leq \beta^2 , \ x,y \geq 0\}$$

Σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$ με

$x^2+y^2 = r^2$ άρα $\alpha^2 \leq r^2 \leq \beta^2 \Rightarrow \alpha \leq r \leq \beta$ και $x,y \geq 0$

δηλαδή $\cos\theta, \sin\theta \geq 0$ (αφού $r \geq 0$) $\Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

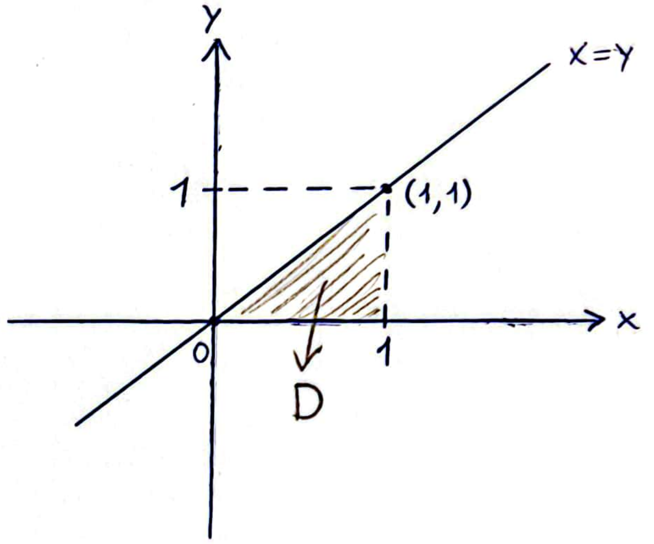
άρα $D^* = \{(r,\theta) : \alpha \leq r \leq \beta , \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$I_2 = \int_\alpha^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(r^2)\cdot r \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{4}\left[\beta^2\cdot\ln\beta^2 - \alpha^2\cdot\ln\alpha^2 - (\beta^2-\alpha^2)\right].$$

Άσκηση 3

Να υπολογισθεί το $I = \iint_D dx\,dy$ με $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x ,\ x \le 1\}$ με καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

Λύση



D x-απλό προφανώς

Καρτεσιανές : $I = \int_0^1 \int_0^x dy\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$

Πολικές : $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$

και για $y = x \Rightarrow r\cdot\sin\theta = r\cdot\cos\theta \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, για $y = 0 \overset{r>0}{\Rightarrow} \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

και για $x = 1 \Rightarrow r\cdot\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}$ οπότε

$D^* = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} ,\ 0 < r \le \frac{1}{\cos\theta}\}$ (θ-απλό)

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{1/\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\left[\tan\theta\right]_0^{\pi/4} =$

$= \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$