## Άσκηση 1

Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $2^{ης}$ τάξης με κέντρο το $(0,0)$ της συνάρτησης $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

**Λύση**: $f(0,0)=0$

$$f_x(x,y)=2x\cdot\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_x(0,0)=0$$

$$f_y(x,y)=2y\cdot\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_y(0,0)=0$$

$$f_{xx}(x,y)=2\cdot\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xx}(0,0)=2$$

$$f_{xy}(x,y)=-4xy\cdot\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xy}(0,0)=0$$

$$f_{yy}(x,y)=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\cdot\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{yy}(0,0)=2$$

$$P_2(x,y)=f(0,0)+\nabla f(0,0)\cdot\underline{h}+\frac{1}{2!}\underline{h}^T\cdot H_f(0,0)\cdot\underline{h}=$$

$$=0+\begin{pmatrix} f_x(0,0) & f_y(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}\cdot\underline{h}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}$$

$$=0\cdot h_1+0\cdot h_2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2h_1 & 2h_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}$$

$$=h_1^2+h_2^2=x^2+y^2 \quad \text{αφού } h_1=x-0, \; h_2=y-0$$

(Εν γένει $\underline{h}=\underline{x}-\underline{x}_0$)

# Άσκηση 2

Χρησιμοποιώντας γραμμική προσέγγιση να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή της ποσότητας $\sqrt{(3,04)^2+(3,98)^2}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι πρόκειται για την τιμή της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ στο σημείο $x=3,04$ και $y=3,98$.

Το σημείο αυτό βρίσκεται πολύ κοντά στο σημείο $A(3,4)$ στο οποίο η τιμή της συνάρτησης βρίσκεται απλά. Επειδή ζητείται γραμμική προσέγγιση, τότε θα προσεγγίσουμε την $f$ με το πολυώνυμο Taylor α΄ βαθμού στη θέση $(3,4)$.

$$f(x,y)\approx P_1(x,y) \Rightarrow f(x,y)=f(3,4)+\nabla f(3,4)\cdot \underline{h}$$

όπου $\nabla f(3,4)=\begin{pmatrix} f_x(3,4) & f_y(3,4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6 & 0,8\end{pmatrix}$

και $\underline{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$ και $f(3,4)=5$

άρα $f(x,y)=5+\begin{pmatrix}0,6 & 0,8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}=5+0,6\cdot(x-3)+0,8\cdot(y-4)$

και για $x=3,04$ και $y=3,98$ :

$$f(3,04\,,\,3,98)\approx 5+0,04\cdot 0,6-0,02\cdot 0,8 \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(3,04)^2+(3,98)^2}\approx 5,008.$$

Αν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό με $f: U \to \mathbb{R}$, $C^3$, $\underline{x}_0 \in U$. Τότε $\underline{x}_0$ κρίσιμο αν και μόνο αν $\nabla f(\underline{x}_0) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall 1 \le i \le n$

- Αν ο Εσσιανός πίνακας της $f$ στο $\underline{x}_0$, δηλαδή ο $H_f(\underline{x}_0)$, έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές, τότε το $\underline{x}_0$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f$.

- Αν ο $H_f(\underline{x}_0)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του αρνητικές, τότε $\underline{x}_0$ τοπικό μέγιστο.

- Αν ο $H_f(\underline{x}_0)$ έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές τότε $\underline{x}_0$ σάγμα.

Για $U \subseteq \mathbb{R}^2$ μπορούμε, επίσης, να δουλέψουμε ως εξής:

$$H_f(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\underline{x}_0) & f_{xy}(\underline{x}_0) \\ f_{xy}(\underline{x}_0) & f_{yy}(\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$ και $\Delta$ η ορίζουσά του δηλαδή $\Delta = f_{xx}(\underline{x}_0) \cdot f_{yy}(\underline{x}_0) - (f_{xy}(\underline{x}_0))^2$

- Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(\underline{x}_0) > 0$ τότε $\underline{x}_0$ τοπικό ελάχιστο
- Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(\underline{x}_0) < 0$ τότε $\underline{x}_0$ τοπικό μέγιστο
- Αν $\Delta < 0$ τότε $\underline{x}_0$ σάγμα
- Αν $\Delta = 0$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα και συνήθως δουλεύουμε με ορισμό ακροτάτου.

## Άσκηση 3

Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία των:

(i) $f(x,y) = e^{x+y}\cdot(x^2 - xy + y^2)$

(ii) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 - y^2$

<u>Λύση</u>: (i) $f_x = e^{x+y}\cdot(x^2 - xy + y^2 + 2x - y)$

$$f_y = e^{x+y}\cdot(x^2 - xy + y^2 - x + 2y)$$

Κρίσιμα σημεία: $\nabla f = 0 \Rightarrow (f_x \ f_y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

$$\overset{e^{x+y}\neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 + 2x - y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - x + 2y = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι συμμετρικό ως προς την εναλλαγή $x \leftrightarrow y$ (δηλαδή βγαίνει το ίδιο σύστημα) άρα αναζητούμε λύσεις για τις οποίες ισχύει $x = y$. Τότε, έχουμε: $y^2 - y^2 + y^2 + 2y - y = 0 \Rightarrow$

$$y\cdot(y+1) = 0$$

Άρα ρίζες $y_1 = 0$, $y_2 = -1$ και αφού $x = y$ τότε $x_1 = 0$ και $x_2 = -1$. Οπότε κρίσιμα σημεία της $f$ τα $A(0,0)$ και $B(-1,-1)$.

Τώρα $f_{xx} = e^{x+y} \cdot (x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 2)$

$f_{xy} = e^{x+y} \cdot (x^2 - xy + y^2 + x + y - 1) = f_{yx}$ αφού $f$ είναι $C^2$ ως πράξεις $C^2$ συναρτήσεων

$f_{yy} = e^{x+y} \cdot (x^2 - xy + y^2 + 4y - 2x + 2)$

Για το $A(0,0)$ : $f_{xx}(0,0) = 2 = f_{yy}(0,0)$

$f_{xy}(0,0) = -1$

Άρα $\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3 > 0$ οπότε $A$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου

και επειδή $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ τότε $A(0,0)$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου με $f_{min} = f(0,0) = 0$

Για το $B(-1,-1)$ : $f_{xx}(-1,-1) = e^{-2} = f_{yy}(-1,-1)$

$f_{xy}(-1,-1) = -2e^{-2}$

Άρα $\Delta(-1,-1) = \begin{vmatrix} e^{-2} & -2e^{-2} \\ -2e^{-2} & e^{-2} \end{vmatrix} = -3e^{-4} < 0$

αφού $e^x > 0 \ \forall x$ άρα $e^{-4} > 0$.

Οπότε το $B(-1,-1)$ είναι σάγμα.

(ii) $f_x = 4x^3$ , $f_y = 8y^3 - 2y$

Κρίσιμα σημεία : $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(4y^2-1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{ ή } 1/2 \text{ ή } -1/2 \end{cases}$

άρα $A(0,0)$ , $B(0, 1/2)$ , $\Gamma(0, -1/2)$.

$f_{xx} = 12x^2$ , $f_{xy} = 0 = f_{yx}$ , $f_{yy} = 24y^2 - 2$

Άρα είναι $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 12x^2 \cdot (24y^2 - 2)$

Για το $A(0,0)$ : $\Delta(0,0) = 0$ άρα θα βγάλουμε συμπέρασμα με τον ορισμό.

Θεωρούμε τυχαίο σημεία $M(a,b)$ κοντά στο $A(0,0)$ και τότε :

$\delta = f(0,0) - f(a,b) = 0 - (a^4 + 2b^4 - b^2) \Rightarrow$

$\delta = -a^4 - 2b^4 + b^2$

Αν το $M$ βρίσκεται πάνω στον $y$-άξονα, δηλαδή έχουμε $a = 0$ , τότε $\delta = -2b^4 + b^2 > 0$ διότι $M$ κοντά στο $(0,0)$ δηλαδή $b$ κοντά στο $0$ άρα $|b| < 1$.

Σαρώθηκε με το CamScanner

Αν το Μ βρίσκεται πάνω στον x-άξονα, τότε $b=0$

οπότε $\delta = -a^4 < 0$.

Άρα έχουμε άλλοτε $\delta > 0$ και άλλοτε $\delta < 0$ οπότε

$A(0,0)$ σάγμα.

Για το $B(0,1/2)$: $\Delta(0,1/2)=0$ οπότε όμοια με πριν πάμε με ορισμό θεωρώντας $M(a,b)$ κοντά στο B.

$$\delta = f(0,1/2) - f(a,b) = -a^4 - 2\left(\frac{1}{4} - b^2\right)^2 < 0$$

$\forall M(a,b) \neq B(0,1/2)$ άρα $B(0,1/2)$ τοπικό ελάχιστο.

Για το $\Gamma(0,-1/2)$: $\Delta(0,-1/2)=0$ άρα με ορισμό για $M(a,b)$ πολύ κοντά στο Γ έχουμε:

$$\delta = f(0,-1/2) - f(a,b) = -a^4 - 2\cdot\left(\frac{1}{4} - b^2\right)^2 < 0$$

$\forall M$ κοντά στο Γ οπότε Γ τοπ. ελάχιστο.

## Άσκηση 4

Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + z^2 .$$

**Λύση**: Η $f$ είναι $C^\infty$ ως πολυωνυμική.

Για τα κρίσιμα της $f$: $\nabla f = 0$ δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= 0 \\ f_z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ -3y^2 + 9 &= 0 \\ 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \pm 1 \\ y &= \pm\sqrt{3} \\ z &= 0 \end{aligned}\right.$$

άρα κρίσιμα τα $A(1,\sqrt{3},0)$, $B(1,-\sqrt{3},0)$, $C(-1,\sqrt{3},0)$, $D(-1,-\sqrt{3},0)$

Είμαστε στον $\mathbb{R}^3$ άρα δουλεύουμε με τον Εσσιανό πίνακα:

$$H_f(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} = \begin{bmatrix} 6x_0 & 0 & 0 \\ 0 & -6y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

διαγώνιος άρα ιδιοτιμές του οι $6x_0, -6y_0, 2$

Για το A: Ιδιοτιμές $6, -6\sqrt{3}, 2$ και θετικές και αρνητικές οπότε A σάγμα.

Σαρώθηκε με το CamScanner

Για το B : Ιδιοτιμές $6, 6\sqrt{3}, 2$ όλες θετικές άρα τοπικό ελάχιστο.

Για το C : Ιδιοτιμές $-6, -6\sqrt{3}, 2$ άρα σάγμα

Για το D : Ιδιοτιμές $-6, 6\sqrt{3}, 2$ άρα σάγμα.

## Άσκηση 5

Δίνεται η $f(x,y)=(y-x^2)\cdot(y-2x^2)$

(i) Δείξτε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία του $(0,0)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

(ii) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά όχι τοπικό ελάχιστο αυτής.

**Λύση:**

(i) Ευθείες που διέρχονται από το $(0,0)$ έχουν μορφή:

$x=0$ , $y=\lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

Για $x=0$ : $f(0,y)=y^2 \geq 0 = f(0,0)$ $\forall y \in \mathbb{R}$ άρα στο $(0,0)$ έχουμε τοπικό ελάχιστο πάνω στη $x=0$

Για $y=0$ : $f(x,0)=2x^4 \geq 0 = f(0,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ άρα $(0,0)$ τοπικό ελάχιστο

Για $y=\lambda x$ , $\lambda>0$ : $f(x,\lambda x)=x^2(\lambda-x)(\lambda-2x)$ τότε έχουμε

$f \geq 0$ στο $(-\infty, \lambda/2) \cup (\lambda, +\infty)$

$0 \in (-\infty, \lambda/2)$ αφού $\lambda>0$ άρα σε μία "γειτονιά" του 0 , έστω $\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ έχουμε το $(0,0)$ τοπικό ελάχιστο.

Για $y=\lambda x$ , $\lambda<0$ : Όμοια $f \geq 0$ στην "γειτονιά" $\left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ άρα όντως $(0,0)$ τοπικό ελάχιστο.

(ii) $f_x = -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2)$

$f_y = y-2x^2+y-x^2 = 2y-3x^2$

Παρατηρούμε ότι $\nabla f(0,0)=0$ αφού $f_x(0,0)=0=f_y(0,0)$ οπότε όντως $(0,0)$ κρίσιμο σημείο.

Όμως δεν είναι τοπικό ελάχιστο.

Πράγματι, κοντά στο $(0,0)$ για $x\neq 0$ και επιλέγοντας $y\in(x^2, 2x^2)$ έχουμε $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)<0=f(0,0)$ και αυτό μπορεί να γίνει οσοδήποτε κοντά στο $(0,0)$ άρα δεν είναι τοπικό ελάχιστο.