Μερική Παράγωγος

και

κατά κατεύθυνση Παράγωγος

Σχόλιο: Εάν υπάρχουν οι $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ στο (x_0, y_0) μιας $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τότε <u>δεν</u> έπεται ότι η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).

(Αυτό ισχύει και γενικά στον $\mathbb{R}^n$)

Παράδειγμα: $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Είναι ασυνεχής στο $(0,0)$

όμως $$\frac{df}{dx}(0,0) = 0 = \frac{df}{dy}(0,0)$$

βγαίνει
με ορισμό μερικής
παραγώγου (βλ. ασκ. 2)

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων ως προς όλες τις μεταβλητές.

(α) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$

(β) $\underline{F}(x,y,z) = (2x^2y^2 - z^2, \; xe^y - \cos z, \; xyz)$

Λύση

α) Κρατάμε το y σταθερό, οπότε:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(x^2+y^2) = -\sin(x^2+y^2)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+y^2) =$$

$$= -2x\cdot\sin(x^2+y^2)$$

Κρατώντας το x σταθερό:

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}\cos(x^2+y^2) = -\sin(x^2+y^2)\cdot\frac{d}{dy}(x^2+y^2) =$$

$$= -2y\cdot\sin(x^2+y^2)$$

B) $\frac{dF}{dx} = \left(\frac{d(2x^2y^2 - z^2)}{dx}, \frac{d(xe^y - \cos z)}{dx}, \frac{d(xyz)}{dx} \right)$

$= \left(4xy^2, e^y, yz \right)$

$\frac{dF}{dy} = \left(4x^2y, xe^y, xz \right)$

$\frac{dF}{dz} = \left(-2z, \sin z, xy \right)$

Άσκηση 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y αν υπάρχουν.

Λύση

Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε ρητή συνάρτηση με παρανομαστή διάφορο του μηδενός. Άρα υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

$$f_x = \frac{df}{dx} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{df}{dy} = \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Στο $(0,0)$ εφαρμόζουμε τον ορισμό:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x \cdot 0}{x^2+0^2} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0 = f_x(0,0)$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0 = f_y(0,0).$$

Ο ορισμός της κατά κατεύθυνση παραγώγου είναι : $D_{\underline{u}} f(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{u}) - f(\underline{x}_0)}{h}$

Όμως μπορεί να βρεθεί και ως το εξής εσωτερικό γινόμενο :

$$D_{\underline{u}} f(\underline{x}_0) = \frac{df}{d\underline{u}}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \hat{u}$$

όπου $\hat{u} = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}$ το μοναδιαίο του $\underline{u}$.

[Αυτό όταν η f είναι μία συνηθισμένη συνάρτηση (πολυωνυμική, ρητή, τριγωνομετρική, εκθετική κ.τ.λ.) δηλαδή υπάρχει η παράγωγός της σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Διαφορετικά δουλεύουμε με τον ορισμό.]

Άσκηση 3

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x,y)=x^2+2xy$ στη θέση $A(1,-2)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\underline{n}=(3,4)$.

Λύση

Το μέτρο του διανύσματος $\underline{n}=(3,4)$ είναι

$$\|\underline{n}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

Άρα το αντίστοιχο μοναδιαίο του $\underline{n}$ είναι:

$$\hat{n} = \frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Η κλίση ∇f (ή $\text{grad} f$) της συνάρτησης f είναι:

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right) = (2x+2y, 2x)$$

και στο $A(1,-2)$ είναι $\nabla f\big|_A = (-2,2)$

Άρα η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι:

$$D_{\underline{n}} f\big|_A = \frac{df}{dn}\Big|_A = \nabla f\big|_A \cdot \hat{n} = (-2,2)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) =$$

$$= (-2)\frac{3}{5} + 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

Άσκηση 4

Δίνεται $f(x,y,z) = y^2 z^2 - x^2$ και $A(2,-1,3)$.

Να βρεθεί η κατεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος της $f(x,y,z)$ στο σημείο A γίνεται μέγιστη. Να βρεθεί η μέγιστη αυτή τιμή.

Λύση

Γενικά, μία κατεύθυνση μπορεί να οριστεί από ένα διάνυσμα μοναδιαίο $\hat{n}$.

Εδώ έστω $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ αφού είμαστε στον $\mathbb{R}^3$.

Τότε η παράγωγος της f στο A κατά κατεύθυνση του $\hat{n}$ είναι:

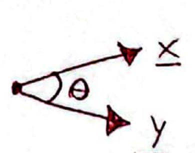
$$D_{\hat{n}} f \Big|_A = \frac{df}{dn}\Big|_A = \nabla f \Big|_A \cdot \hat{n}$$

Όμως $\nabla f = (-2x, 2yz^2, 2y^2 z)$ και άρα

$$\nabla f \Big|_A = (-4, -18, 6)$$

(Θυμάμαι: Αν $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ τότε

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos\theta$$



)

Άρα $\left.\frac{df}{dn}\right|_A = \underbrace{\|\nabla f|_A\|}_{\sqrt{376}} \cdot \underbrace{\|\hat{n}\|}_{1 \text{ ως μοναδιαίο}} \cdot \cos\theta = \sqrt{376} \cdot \cos\theta$

και αφού $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ τότε για να μεγιστοποιείται πρέπει $\cos\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$

Δηλαδή τα διανύσματα $\hat{n}$, $\nabla f|_A$ να είναι ομόρροπα και επειδή $\hat{n}$ μοναδιαίο τότε έπεται ότι $\hat{n}$ είναι το αντίστοιχο μοναδιαίο του $\nabla f|_A$: $\hat{n} = \frac{\nabla f|_A}{\|\nabla f|_A\|} = \frac{1}{\sqrt{376}}(-4, -18, 6)$

η ζητούμενη κατεύθυνση.

Παρατήρηση: Η κλίση ∇f της f σε ένα σημείο είναι το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του οποίου η συνάρτηση f παρουσιάζει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής στο σημείο αυτό.

Καμπύλες και Επιφάνειες

Σύνολο στάθμης της f

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

$\Sigma_c = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = c \}$ ονομάζεται σύνολο στάθμης της f, σταθεράς c.

Παράδειγμα

1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $F(x,y) = x^2 + y^2$

Τότε $\Sigma_c = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = c \}$ για $c \in \mathbb{R}$

Αν $c < 0$ τότε $\Sigma_c = \varnothing$

Αν $c = 0$ τότε $\Sigma_c = \{(0,0)\}$

Αν $c > 0$ τότε $\Sigma_c = \{$ κύκλοι κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{c}$ $\}$

2) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Τότε $\Sigma_c = \{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c \}$ για $c \in \mathbb{R}$

Αν $c < 0$ τότε $\Sigma_c = \varnothing$

Αν $c = 0$ τότε $\Sigma_c = \{(0,0,0)\}$

Αν $c > 0$ τότε $\Sigma_c = \{$ ομόκεντρες σφαίρες κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{c}$ $\}$

Στον $\mathbb{R}^2$ μία ευθεία για να περιγραφεί αρκεί η κλίση της και ένα σημείο της ή δύο σημεία της.

Στον $\mathbb{R}^3$ ένα επίπεδο για να περιγραφεί αρκούν ένα σημείο του και ένα διάνυσμα κάθετο σε αυτό ή τρία μη συνευθειακά σημεία του.

Το ∇f είναι κάθετο στην καμπύλη (ή επιφάνεια) στάθμης.

Μορφές επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$:

α) Παραμετρική μορφή $\underline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

β) Γράφημα κάποιας $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$G_f = \{ (x,y,z) \mid z = f(x,y) \}$$

γ) Κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις μία εξίσωση της μορφής $F(x,y,z) = 0$ επιλύεται (μονοσήμαντα) ως προς $z = f(x,y)$ και ορίζει μία επιφάνεια.

$$\left(z = f(x,y) \Rightarrow \overbrace{z - f(x,y)}^{F} = 0 \Rightarrow F(x,y,z) = 0 \right)$$

Αν $A(x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο της επιφάνειας με εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ τότε το $\nabla F\big|_A = \left(\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz} \right)\Big|_A$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο A.

Άρα, το επίπεδο που περνά από το σημείο A της επιφάνειας και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\nabla F\big|_A$ είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο A.

Η ευθεία που περνά από το σημείο Α της επιφάνειας και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\nabla F|_A$ είναι η κάθετη ευθεία στην επιφάνεια στο σημείο Α.

(επιφάνεια στάθμης)

Μία ισοσταθμική επιφάνεια είναι μία επιφάνεια με εξίσωση $F(x,y,z)=c$, c σταθερά.

Για διαφορετικές τιμές της c προκύπτουν διαφορετικές ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $F(x,y,z)$.

Μορφές καμπυλών στον $\mathbb{R}^2$:

α) Παραμετρική μορφή $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

β) Γράφημα κάποιας $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$G_f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$$

γ) Κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις μία εξίσωση της μορφής $F(x,y) = 0$ επιλύεται ως προς $y = f(x)$ και ορίζει μία καμπύλη.

Στον $\mathbb{R}^3$ οι καμπύλες είναι τομές επιφανειών

Το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο που αντιστοιχεί στην τιμή του t είναι το $\underline{\varepsilon} = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Άσκηση 2

(α) Να δειχθεί ότι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο με εξίσωση $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ είναι το (α,β,γ).
(β) Να προσδιορισθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια $x^2+4y^2+z^2=36$, που είναι παράλληλο στο $x+y-z=0$.
(γ) Να βρεθεί η εξίσωση της καθέτου στο ίδιο σημείο.

Λύση

(α) Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x,y,z)=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$, που έχει ισοσταθμική επιφάνεια (με $c=0$) το επίπεδο με εξίσωση $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. Το gradf:

$$\text{grad}f=(f_x,f_y,f_z)=(\alpha,\beta,\gamma)$$

είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο σε τυχαία θέση (x,y,z), ανεξάρτητο των x,y,z.
(β) Το επίπεδο $x+y-z=0$ έχει κάθετο διάνυσμα το $\underset{\sim}{n}$:

$$\underset{\sim}{n}=(1,\ 1,-1)$$

σύμφωνα με το (α).

Η επιφάνεια $x^2+4y^2+z^2=36$ είναι ισοσταθμική της συνάρτησης

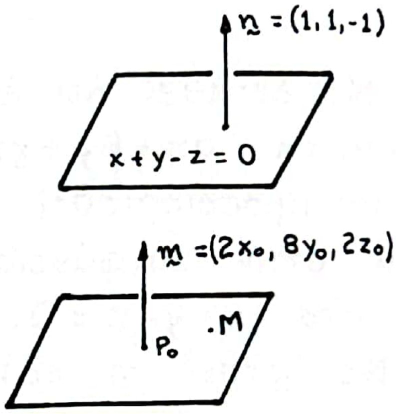
$$f(x,y,z) = x^2+4y^2+z^2$$

με $c=36$. Ένα κάθετο διάνυσμα σε τυχαίο σημείο (x,y,z) είναι το gradf:

$$\text{grad}f = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 8y, 2z)$$

Έστω $P_0(x_0,y_0,z_0)$ το σημείο στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο $x+y-z=0$. Το κάθετο διάνυσμα σ' αυτό είναι προφανώς

$$\underset{\sim}{m} = (2x_0, 8y_0, 2z_0)$$



Προφανώς, τα διανύσματα $\underset{\sim}{n}, \underset{\sim}{m}$ είναι παράλληλα, άρα

$$\underset{\sim}{m} = \lambda \underset{\sim}{n} \implies$$

$$(2x_0, 8y_0, 2z_0) = \lambda(1,1,-1) \implies$$

$$(2x_0, 8y_0, 2z_0) = (\lambda, \lambda, -\lambda) \qquad (1)$$

Ακόμη το σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ανήκει στην επιφάνεια με εξίσωση $x^2+4y^2+z^2=36$. Άρα:

$$x_0^2+4y_0^2+z_0^2=36 \qquad (2)$$

Η σχέση (1) δίνει: $2x_0=\lambda$, $8y_0=\lambda$, $2z_0=-\lambda$, οπότε παίρνω:

$$x_0 = \frac{\lambda}{2}, \quad y_0 = \frac{\lambda}{8}, \quad z_0 = -\frac{\lambda}{2}$$

και η σχέση (2) δίνει: $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\lambda}{8}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 36$ οπότε,

προκύπτουν δύο τιμές του λ: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -8$

Για $\lambda_1 = 8$ προκύπτει το σημείο $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{8}, -\frac{8}{2}\right)$, δηλαδή $P_{01}(x_0, y_0, z_0) = (4, 1, -4)$, ενώ για $\lambda_2 = -8$ το σημείο P_{02}: $P_{02}(x_0, y_0, z_0) = (-4, -1, 4)$. Έτσι το πρόβλημα έχει δύο λύσεις:

Πρώτη λύση: Εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $P_{01}(4, 1, -4)$
Το τυχαίο σημείο $M(x, y, z)$ που ανήκει στο εφαπτόμενο επίπεδο είναι τέτοιο ώστε:

$$\underset{\sim}{P_{01}M} \perp \underset{\sim}{n} \Rightarrow (x-4, y-1, z+4) \perp (1, 1, -1) \Rightarrow$$

$$(x-4, y-1, z+4) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Rightarrow (x-4) \cdot 1 + (y-1) \cdot 1 + (z+4)(-1) =$$

$$= 0 \Rightarrow x + y - z - 9 = 0$$

Το τυχαίο σημείο $N(x, y, z)$ της καθέτου είναι τέτοιο ώστε: $\underset{\sim}{P_{01}N} \parallel \underset{\sim}{m} \Rightarrow \underset{\sim}{P_{01}N} \parallel \underset{\sim}{n} \Rightarrow$

$$\underset{\sim}{P_{01}N} = t \cdot \underset{\sim}{n} \Rightarrow (x-4, y-1, z+4) = t(1, 1, -1) \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (4, 1, -4) + t(1, 1, -1)$$

που είναι η εξίσωση της καθέτου σε διανυσματική - παραμετρική μορφή.

Δεύτερη λύση: Εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P_{02}: $P_{02}(-4, -1, 4)$. Αν $M(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του, έχω:

$$(x+4, y+1, z-4) \perp (1, 1, -1) \Rightarrow (x+4) \cdot 1 + (y+1) \cdot 1 + (z-4)(-1) =$$

$$= 0 \Rightarrow x + 4 + y + 1 - z - 4 = 0 \Rightarrow x + y - z + 9 = 0$$

Αν $N(x, y, z)$ τυχαίο σημείο της καθέτου έχω:

$$\underset{\sim}{P_{02}N} = t\underset{\sim}{n} \Rightarrow (x+4, y+1, z-4) = t(1, 1, -1) \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (-4, -1, 4) + t(1, 1, -1)$$

Άσκηση 3

Δίνεται η επιφάνεια $z^2=x^2+y^2$. Να δειχθεί ότι κάθε επίπεδο που εφάπτεται σ' αυτή, περνά απο την αρχή των αξόνων.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

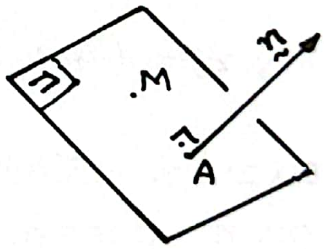
$$f(x,y,z) = z^2-x^2-y^2$$

Η εξίσωση της επιφάνειας γράφεται $f(x,y,z)=0$, δηλαδή είναι ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης $f(x,y,z)$ με $c=0$. Είναι

$$\text{grad}f = (f_x, f_y, f_z) = (-2x,-2y,2z)$$

Αν $A(k,\lambda,\mu)$ είναι τυχαίο σημείο της επιφάνειας, το διάνυσμα $\underset{\sim}{n}$:

$$\underset{\sim}{n} = \text{grad}f_A = (-2k,-2\lambda,2\mu)$$



είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο (π) της επιφάνειας που περνά από το Α.

Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου π στο σημείο $A(k,\lambda,\mu)$ της επιφάνειας, είναι:

$$\underset{\sim}{AM} \perp \underset{\sim}{n} \Rightarrow \underset{\sim}{AM}\cdot\underset{\sim}{n}=0 \Rightarrow (x-k,\ y-\lambda,\ z-\mu)\cdot(-2k,-2\lambda,2\mu)=0$$

$$\Rightarrow (x-k)(-2k)+(y-\lambda)(-2\lambda)+(z-\mu)2\mu=0 \Rightarrow$$

$$-2kx-2\lambda y+2\mu z+2k^2+2\lambda^2-2\mu^2=0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) ικανοποιείται για $x=y=z=0$ διότι είναι $\mu^2=k^2+\lambda^2$ (το Α ανήκει στην επιφάνεια). Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο σε τυχαίο σημείο $A(k,\lambda,\mu)$ περνά από το $(0,0,0)$.

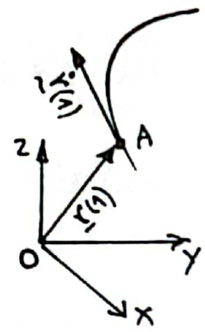
Άσκηση 1

Δίνεται η καμπύλη (γ) : με εξίσωση $\underset{\sim}{r}(t) = (t-1,\ t^2,\ -t^2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης καθώς και η εξίσωση του καθέτου επιπέδου της καμπύλης στο σημείο της $\underset{\sim}{r}(1)$.

Λύση

Κατ' αρχήν το σημείο $\underset{\sim}{r}(1)$ της καμπύλης είναι: το A:

$$\underset{\sim}{r}(1) = (1-1,\ 1^2,\ -1^2) \implies A(0,1,-1)$$

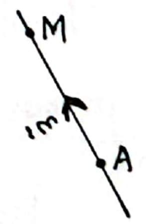


Η παράγωγος $\dot{\underset{\sim}{r}}(t)$ είναι:

$$\dot{\underset{\sim}{r}}(t) = (1,\ 2t,\ -2t)$$

και για $t=1$ είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στο σημείο $A(0,1,-1)$ δηλαδή στο $\underset{\sim}{r}(1)$. Έτσι, ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο A είναι το $\underset{\sim}{\xi}$:

$$\underset{\sim}{\xi} = \dot{\underset{\sim}{r}}(1) = (1,\ 2\cdot 1,\ -2\cdot 1) \implies \underset{\sim}{\xi} = (1,2,-2)$$



Η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης (γ) στο σημείο της A, περνά από το σημείο $A(0,1,-1)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\underset{\sim}{\xi} = (1,2,-2)$. Έτσι, αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο της εφαπτομένης ευθείας στο A, έχουμε:

$$\underset{\sim}{AM} \parallel \underset{\sim}{\xi} \implies \underset{\sim}{AM} = \lambda \underset{\sim}{\xi} \implies (x-0,\ y-1,\ z-(-1)) = \lambda(1,2,-2) \implies$$

$$(x,y,z) - (0,1,-1) = \lambda(1,2,-2) \implies (x,y,z) = (0,1,-1) + \lambda(1,2,-2)$$

δηλαδή έχουμε τη διανυσματική - παραμετρική μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης στο A.

Το επίπεδο που περνά από το σημείο $A(0,1,-1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\underset{\sim}{\xi} = (1,2,-2)$ είναι, προφανώς, το κάθετο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο της A. Αν

$N(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου αυτού, τότε είναι:

$$\underset{\sim}{AN} \perp \underset{\sim}{\varepsilon} \Rightarrow \underset{\sim}{AN}\cdot \underset{\sim}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow (x-0,\, y-1,\, z-(-1))\cdot(1,2,-2)=0 \Rightarrow$$

$$x\cdot 1 + (y-1)2 + (z+1)(-2) = 0 \Rightarrow x+2y-2z-4=0$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης καθώς και η εξίσωση του καθέτου επιπέδου της καμπύλης (γ):

$$\{x^2-y^2+z^2-4xy+z-6=0, \quad x^2+2xz-y+2z=0\}$$

στο σημείο της $A(-1,1,1)$.

Λύση

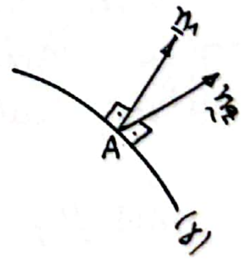
Η καμπύλη (γ) θεωρείται ως τομή των επιφανειών:

$$S_1:\ x^2-y^2+z^2-4xy+z-6=0 \qquad (1)$$

$$S_2:\ x^2+2xz-y+2z=0 \qquad (2)$$

Η επιφάνεια S_1 έχει εξίσωση: $F(x,y,z)=0$
όπου

$$F(x,y,z) = x^2-y^2+z^2-4xy+z-6$$



Έτσι, το διάνυσμα:

$$\underset{\sim}{n_1} = \operatorname{grad} F\Big|_A = (2x-4y,\, -2y-4x,\, 2z+1)\Big|_A \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{n_1} = (-6,2,3)$$

είναι κάθετο στην επιφάνεια S_1 στο σημείο (της) $A(-1,1,1)$. Επειδή η καμπύλη (γ) βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια S_1 συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα $\underset{\sim}{n_1}$ είναι κάθετο στην καμπύλη (γ) στο σημείο $A(-1,1,1)$.

Η επιφάνεια S_2 έχει εξίσωση $G(x,y,z)=0$, όπου:

$$G(x,y,z) = x^2 + 2xz - y + 2z$$

Έτσι, το διάνυσμα:

$$\underset{\sim}{n}_2 = \operatorname{grad} G\Big|_A = (2x+2z, -1, 2x+2)\Big|_A \Rightarrow \underset{\sim}{n}_2 = (0,-1,0)$$

είναι κάθετο στην επιφάνεια S_2 στο σημείο (της) $A(-1,1,1)$ και επειδή η καμπύλη (γ) βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια S_2, το διάνυσμα $\underset{\sim}{n}_2$ είναι κάθετο στην καμπύλη (γ).

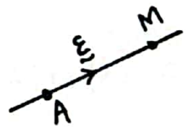
Επειδή τα διανύσματα $\underset{\sim}{n}_1$, $\underset{\sim}{n}_2$ είναι κάθετα στην καμπύλη (γ) στο σημείο της A συμπεραίνουμε ότι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο της A είναι το

$$\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{n}_1 \times \underset{\sim}{n}_2 \Rightarrow \underset{\sim}{\xi} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -6 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{\xi} = (3,0,6)$$

Η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης στο σημείο της A είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\underset{\sim}{\xi}$ (και περνά από το σημείο A) Αν $M(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο της, έχουμε:

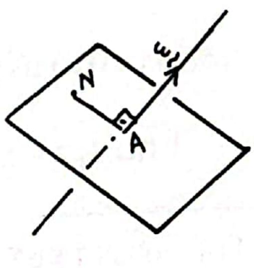
$$\underset{\sim}{AM} \parallel \underset{\sim}{\xi} \Rightarrow \underset{\sim}{AM} = \lambda \underset{\sim}{\xi} \Rightarrow (x,y,z) - (-1,1,1) = \lambda(3,0,6) \Rightarrow$$

$$(x,y,z) = (-1,1,1) + \lambda(3,0,6)$$



Το κάθετο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο της A, περνά (προφανώς) από το A και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\underset{\sim}{\xi}$. Αν $N(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του, τότε είναι:

$$\underset{\sim}{AN} \perp \underset{\sim}{\xi} \Rightarrow \underset{\sim}{AN} \cdot \underset{\sim}{\xi} = 0 \Rightarrow$$



$$(x-(-1), y-1, z-1)\cdot(3,0,6) = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1)\cdot 3 + (y-1)\cdot 0 + (z-1)\cdot 6 = 0 \Rightarrow 3x + 6z - 3 = 0$$