Αλέξανδρος Χατζηνικολάου

Φροντιστήριο Τρίτης 17-01-2023

Ανάλυση ΙΙ

Ορισμός 1 (Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα Β′ είδους)**.** *Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ συνεχής συνάρτηση και $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ C^1 καμπύλη. Ορίζουμε το $\int_c F \cdot ds$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F κατά μήκος της c ως*

$$\int_c F \cdot ds := \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t)dt.$$

Παρατήρηση 1 (Εναλλακτικός συμβολισμός)**.** *Έστω ότι η $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γράφεται ως προς τις συνιστώσες της σαν*

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

ενώ η καμπύλη $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ γράφεται ως

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Τότε, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c F \cdot ds$ συμβολίζεται και ως

$$\int_c F \cdot ds = \int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

και υπολογίζεται ως εξής,

$$\int_c F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b (F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt})dt =$$
$$= \int_a^b \Big(F_1(x(t), y(t), z(t))\frac{dx(t)}{dt} + F_2(x(t), y(t), z(t))\frac{dy(t)}{dt} + F_3(x(t), y(t), z(t))\frac{dz(t)}{dt}\Big)dt.$$

Άσκηση 1. *Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C F ds$ όπου $F(x, y) = (y^2, -xy)$ και C το μέρος του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ που ξεκινάει από το $(1, 0)$ και τελειώνει στο $(0, 1)$ με κατεύθυνση αντίθετη από τη φορά του ρολογιού.*

Λύση. *Αρχικά θα παραμετρήσουμε την καμπύλη. Μια παραμέτρηση του μοναδιαίου κύκλου, με κατεύθυνση αντίθετη από τη φορά του ρολογιού δίνεται από την απεικόνιση*

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Καθώς όμως η καμπύλη C διαγράφει γωνία $\frac{\pi}{2}$, επιλέγουμε την

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_C F \cdot ds = \int_c F \cdot ds = \int_c y^2 dx - xy dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t(-\sin t) - \cos t \sin t \cos t)dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (- \sin^3 t - \cos^2 t \sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t)(\sin^2 t + \cos^2 t)dt =$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = -1.$$

Θεώρημα 1 (Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πεδίου κλίσης)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση και $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε,*

$$\int_c \nabla f \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Λύση. *Έστω $F := f \circ c$, άρα $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι*

$$F'(t) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t). \tag{0.0.1}$$

Όμως, από το Θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού παίρνουμε επίσης ότι

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(c(b)) - f(c(a)). \tag{0.0.2}$$

Άρα

$$\int_c \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = f(c(b)) - f(c(a)),$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τη σχέση 0.0.1 και η τελευταία από την 0.0.2.

Άσκηση 2. *Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα*

$$\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$$

όπου C μια προσανατολισμένη, απλή καμπύλη που ενώνει το σημείο $(1, 1, 1)$ με το $(1, 2, 4)$.

Λύση. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι της μορφής*

$$\int_C F \cdot ds = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

όπου $F = (F_1, F_2.F_3)$, με

$$F_1(x, y, z) = 2xyz, \quad F_2(x, y, z) = x^2z, \quad F_3(x, y, z) = x^2y.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$F = \nabla f$$

όπου $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, είναι η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^2yz.$$

Επομένως καλούμαστε να υπολογίσουμε το

$$\int_C \nabla f \cdot ds.$$

Από την υπόθεση, η καμπύλη C είναι η εικόνα μιας απεικόνισης $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, '1-1' και κατά τμήματα C^1 όπου $c(a) = (1, 1, 1)$ και $c(b) = (1, 2, 4)$. Συνεπώς, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

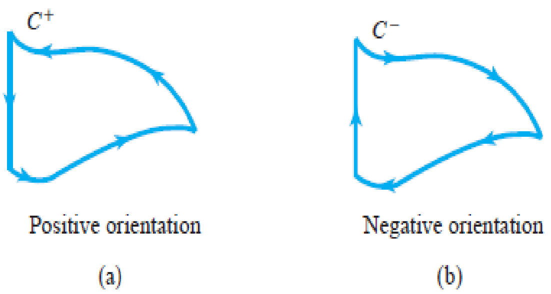
$$\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz = \int_c \nabla f \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a)) = f(1, 1, 1) - f(1, 2, 4) = 8 - 1 = 7.$$

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Green)**.** *Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$, απλό χωρίο και $P, Q : D \to \mathbb{R}^3$, C^1 συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy. \tag{0.0.3}$$

Παρατηρήσεις 1.

1. *Το αριστερό μέλος της σχέσης 0.0.3 είναι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα Β΄ είδους (βλέπε Παρατήρηση 1). Η καμπύλη ∂D είναι προσανατολισμένη θετικά ως προς το χωρίο D. Δηλαδή, όταν περπατάμε κατα μήκος του ∂D με αυτόν τον προσανατολισμό, το χωρίο D είναι στα αριστερά μας.*



2. *Μπορεί κανείς να θυμάται το Θεώρημα Green ως εξής,*

   (α΄) *Στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, βάζουμε τα διαφορικά με τη σωστή σειρά, δηλαδή πρώτα το Pdx μετά το Qdy.*

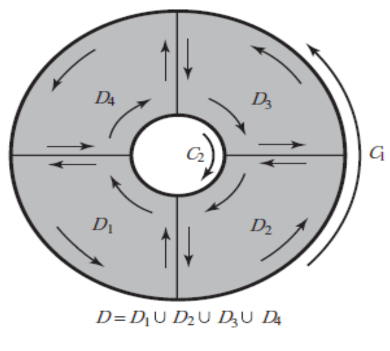
   (β΄) *Στη συνέχεια παίρνουμε την ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

   (γ΄) *Τέλος, γράφουμε αυτή την ορίζουσα μέσα στο διπλό ολοκλήρωμα πάνω από το D.*

3. *Το Θεώρημα Green ισχύει γενικότερα για χωρία $D \subset \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε το D να είναι φραγμένο και το σύνορο ∂D να είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους απλών κλειστών καμπυλών, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_k$, όπου κάθε γ_i προσανατολίζεται θετικά ως προς το D. Το επικαμπύλιο τότε γίνεται,*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \cdots + \int_{\gamma_k} Pdx + Qdy.$$



Άσκηση 3. *Επαληθεύστε το Θεώρημα Green για τον δίσκο D με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R, για τις συναρτήσεις :*

1. $P(x,y) = xy^2$ *και* $Q(x,y) = -yx^2$
2. $P(x,y) = x + y$ *και* $Q(x,y) = y$

Λύση. *1. Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{0.0.4}$$

και

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{0.0.5}$$

δείχνοντας ότι είναι ίσα.
Για αρχή, θα παραμετρικοποιήσουμε τον κύκλο ∂D με τον γνωστό τρόπο,

$$c(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Παρατηρήστε ότι με τη παραμέτρηση αυτή η καμπύλη είναι θετικά προσανατολισμένη. Συνεπώς το επικαμπυλιο ολοκλήρωμα θα γίνει

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} (P(R\cos t, R\sin t)\frac{d(R\cos t)}{dt} + Q(R\cos t, R\sin t)\frac{R\sin t}{dt})dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big((R\cos t)\cdot(R^2\sin^2 t)\cdot(-R\sin t) + (-R\sin t)\cdot(R^2\cos^2 t)\cdot(R\cos t)\Big)dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-R^4\cos t\cdot\sin t\cdot\sin^2 t - R^4\cos t\cdot\sin t\cdot\cos^2 t\Big)dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-R^4\cos t\cdot\sin t\cdot(\sin^2 t + \cos^2 t)\Big)dt = \\
&= -R^4\int_0^{2\pi} \cos t\cdot\sin t dt = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Όσο για το διπλό ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= \iint_D (-2yx - 2yx)dxdy = \\
&= \iint_D (-4yx)dxdy = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R -4r^2\cos\partial\cdot\sin\partial\cdot rdrd\partial = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\partial\cdot\sin\partial\int_0^R -4r^3drd\partial = \\
&= -R^4\int_0^{2\pi}\cos\partial\cdot\sin\partial d\partial = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

όπου παραπάνω κάναμε αλλαγή μεταβλητών με πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. *Άρα,*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = 0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

2. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} \Big((R\cos t + R\sin t)\cdot(-R\sin t) + (R\sin t)\cdot(R\cos t)\Big)dt = \\ &= -R^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \\ &= -\pi R^2,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$. *Όσο για το διπλό ολοκλήρωμα,*

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= -\iint_D 1 dxdy = \\ &= -\pi R^2\end{aligned}$$

αφού το D *είναι ο κυκλικός δίσκος ακτίνας* R, *και άρα το* $\iint_D 1dxdy$ *είναι το εμβαδόν κυκλικού δίσκου. Πράγματι λοιπόν,*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = -\pi R^2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Άσκηση 4. *Έστω* $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ *και* $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. *Αν* D *είναι ο μοναδιαίος δίσκος, εξηγήστε γιατί το Θεώρημα Green δεν εφαρμόζεται για αυτές τις συναρτήσεις.*

Λύση. *Όπως και προηγουμένως, η παραμέτρηση του κύκλου είναι,*

$$c(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα το επικαμπύλιο γίνεται

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} \Big(-\sin t\cdot(-\sin t) + \cos t\cdot\cos t\Big)dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Παρατηρήστε εδώ ότι οι συναρτήσεις P, Q δεν ορίζονται στο σημείο $(0,0)$ και επομένως δεν έχουμε καν το δικαίωμα να γράψουμε το ολοκλήρωμα. Αλλά ας το παραβλέψουμε αυτό, οπότε ο υπολογισμός πιο πάνω είναι αυτός ενός γενικευμένου ολοκληρώματος (δηλαδή αγνοούμε ένα σημείο, αυτό έχει μηδενικό εμβαδόν, δεν μπορεί να συνεισφέρει σε ένα διπλό ολοκλήρωμα).
Έτσι, θα έχουμε

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = 2\pi \neq 0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

δηλαδή οι δύο ποσότητες που εμφανίζονται στο Θεώρημα Green είναι άνισες. Τι συμβαίνει;
Το Θεώρημα Green εφαρμόζεται για συναρτήσεις P, Q οι οποίες είναι C^1 στο D, ενώ οι πιο πάνω συναρτήσεις P, Q δεν ορίζονται σε όλο το D αφού δεν ορίζονται στο (0, 0). Και το ότι οι συγκεκριμένες P, Q δεν ορίζονται στο (0, 0) δεν είναι θέμα ορισμού, δηλαδή κάτι που θα μπορούσαμε να διορθώσουμε ορίζοντάς τις με κάποιο έξυπνο τρόπο στο (0, 0). Αυτός ο τρόπος θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε οι επεκτάσεις να είναι C^1 (άρα και συνεχείς). Θα δούμε όμως ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει εδώ. Το δείχνουμε για την P και όμοια αποδεικνύεται για την Q. Έστω ότι υπάρχει επέκταση $\tilde{P} : D \to R$ της P (άρα $\tilde{P}(x, y) = P(x, y)$ για κάθε $(x, y) \neq (0,0)$) που να είναι C^1.
Η συνάρτηση $\tilde{P}$ είναι συνεχής, επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tilde{P}(x, y) = \tilde{P}(0,0) \in \mathbb{R}\,.$$

Όμως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tilde{P}(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} P(x, y),$$

και για το όριο στο δεξί μέλος παρατηρούμε ότι καθώς το (x, y) τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $y = 0$ ισχύει

$$\lim_{y\to 0} P(0, y) = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{y} = \infty.$$

Θα έπρεπε λοιπόν να ισχύει $\tilde{P}(0,0) = \infty$, άτοπο.