Αλέξανδρος Χατζηνικολάου

Φροντιστήριο Τρίτης 10-01-2023

Ανάλυση ΙΙ

Άσκηση 1. *Υπολογίστε το*

$$\iiint_W \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

όπου W *το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες* $x^2+y^2+z^2=a^2$ *και* $x^2+y^2+z^2=b^2$ *με* $0<b<a$.

Λύση. *Το στερεό* W *είναι το σύνολο* $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : b^2\leq x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$. *Θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή, θέτουμε:*

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\partial \\ y &= \rho\sin\phi\sin\partial \\ z &= \rho\cos\phi, \end{aligned}$$

όπου $0\leq\partial\leq 2\pi$ *και* $0\leq\phi\leq\pi$ *ενώ* $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ *και άρα* $b\leq\rho\leq a$.
Επίσης η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\partial,\phi)}=-\rho^2\sin\phi.$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\iiint_W \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_b^a \frac{\rho^2\sin\phi}{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}}d\rho d\partial d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_b^a \frac{\rho^2\sin\phi}{\rho^3}d\rho d\partial d\phi = \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_b^a \frac{\sin\phi}{\rho}d\rho d\partial d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\,[\ln(\rho)]_b^a\, d\partial d\phi = \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\ln(\frac{a}{b})d\partial d\phi = \int_0^{\pi}\sin\phi\ln(\frac{a}{b})\int_0^{2\pi}1 d\partial d\phi = \\ &= 2\pi\ln(\frac{a}{b})\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi = 4\pi\ln(\frac{a}{b}).\end{aligned}$$

Όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi = 2.$$

Άσκηση 2. *Υπολογίστε το*

$$\iiint_W \exp(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dV$$

όπου W *η μοναδιαία μπάλα του* $\mathbb{R}^3$.

Λύση. *Το* W *δίνεται από,* $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.
Κάνουμε αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\partial \\ y &= \rho\sin\phi\sin\partial \\ z &= \rho\cos\phi, \end{aligned}$$

Άρα,

$$W^* = \{(\rho, \partial, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \partial \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\iiint_W \exp{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dV &= \iiint_{W^*} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\phi d\rho d\partial d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 \sin\phi d\rho d\partial d\phi = \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi \left[\frac{e^{\rho^3}}{3}\right]_0^1 d\partial d\phi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi \frac{(e-1)}{3} d\partial d\phi = \\ &= \int_0^{\pi} \sin\phi \frac{(e-1)}{3}\int_0^{2\pi} 1 d\partial d\phi = 2\pi \frac{(e-1)}{3}\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi = \\ &= \frac{4\pi}{3}(e-1).\end{aligned}$$

Άσκηση 3. *Βρείτε το κέντρο βάρους της περιοχής ανάμεσα στην ευθεία $y = 0$ και την καμπύλη $y = x^2$, όπου $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.*

Λύση. *Έστω D η ζητούμενη περιοχή. Τότε,*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Το κέντρο βάρους ορίζεται ως το σημείο $(\overline{x}, \overline{y})$, όπου

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x\delta(x,y)dxdy}{\iint_D \delta(x,y)dxdy}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint_D y\delta(x,y)dxdy}{\iint_D \delta(x,y)dxdy}.$$

Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με 1, δηλαδή, $\delta(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα εξής

$$\overline{x} = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}, \qquad \overline{y} = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}.$$

• *Ας υπολογίσουμε για αρχή το ολοκλήρωμα $\iint_D dxdy$, δηλαδή το εμβαδόν της περιοχής D. Αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης μιας μεταβλήτης $f(x) = x^2$, στο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$. Άρα,*

$$\iint_D dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{24}.$$

• *Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα $\iint_D xdxdy$, $\iint_D ydxdy$. Παρατηρούμε ότι το χωρίο D είναι y- απλό, άρα*

$$\iint_D xdxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{x^2} xdydx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\int_0^{x^2} 1dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,[y]_0^{x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \frac{1}{64},$$

και

$$\iint_D ydxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{x^2} ydydx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{2}dx = \left[\frac{x^5}{10}\right] = \frac{1}{320}.$$

Τελικά έχουμε ότι

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{24}} = \frac{3}{8},$$

ενώ

$$\overline{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\frac{1}{320}}{\frac{1}{24}} = \frac{3}{40}.$$

Δηλαδή το σημείο $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{40})$ *είναι το κέντρο βάρους της περιοχής.*

Άσκηση 4. *Ένας στέρεος δίσκος ακτίνας* 9 *και ύψους* 2 *τοποθετείται στην αρχή των αξόνων ώστε να περιγράφεται από τις εξισώσεις* $x^2 + y^2 \leq 81$ *και* $0 \leq z \leq 2$. *Αν ο δίσκος έχει πυκνότητα που δίνεται από την συνάρτηση,*

$$\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$$

βρείτε τη μάζα του.

Λύση. *Ο δίσκος περιγράφεται από το* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9^2, 0 \leq z \leq 2\}$. *Η μάζα του δίσκου λοιπόν δίνεται, εξ ορισμού, από τη σχέση*

$$m_d = \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

Άρα, πρέπει να υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_W (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1) dx dy dz.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \partial \\ y &= \sin \partial \\ z &= z, \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \partial, z)} = r.$$

Επίσης, θα έχουμε

$$W^* = \{(r, \partial, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 9, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών:

$$\begin{aligned}\iiint_W (2x^2+2y^2+2z^2+1)dxdydz &= \iiint_{W^*}(2r^2+2z^2+1)rdrd\partial dz = \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^9 (2r^3+2rz^2+r)drd\partial dz = \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{2}+r^2z^2+\frac{r^2}{2}\right]_0^9 drd\partial dz = \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}(\frac{6561}{2}+81z^2+\frac{81}{2})drd\partial dz = \\ &= \int_0^2(\frac{6561}{2}+81z^2+\frac{81}{2})dr\int_0^{2\pi}1d\partial dz = \\ &= 2\pi\left[\frac{6642}{2}z++\frac{81}{3}z^3\right]_0^2 = \\ &= 13716\pi.\end{aligned}$$

Άσκηση 5. *Βρείτε τη μέση τιμή της συνάρτησης* e^{-z} *πάνω από τη μοναδιαία μπάλα* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Λύση. *Θέτουμε* $f(x,y,z)=e^{-z}$, *άρα θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα*

$$[f]_{av} = \frac{\iiint_W f(x,y,z)dxdydz}{\iiint_W dxdydz},$$

όπου W *είναι η μοναδιαία μπάλα του* $\mathbb{R}^3$. *Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής* $\iiint_W dxdydz$ *είναι ακριβώς ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας, συνεπώς*

$$\iiint_W dxdydz = \frac{4\pi}{3}.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\iiint_W e^{-z}dxdydz$, *παρατηρούμε ότι η μοναδιαία μπάλα είναι απλό χωρίο, επομένως μπορεί να γραφτεί και σαν,*

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1\leq z\leq 1, -\sqrt{1-z^2}\leq y\leq \sqrt{1-z^2}, -\sqrt{1-z^2-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-z^2-y^2}\}.$$

Συνεπώς το ολοκήρωμα μας γίνεται,

$$\iiint_W e^{-z}dxdydz = \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} e^{-z}dxdydz = \int_{-1}^1 e^{-z}\underbrace{\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} 1dxdy\right)}_{\mathcal{I}}dz =$$

$$= \int_{-1}^1 e^{-z}\cdot\mathcal{I}dz$$

Όπου παρατηρείστε ότι $\mathcal{I} = \iint_D dxdy$, *είναι το διπλό ολοκλήρωμα πάνω από τον δίσκο ακτίνας* $r=\sqrt{1-z^2}$. *Συνεπώς*

$$\mathcal{I} = \iint_D dxdy = \pi r^2 = \pi(1-z^2),$$

αφού ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου D. Επιστρέφοντας έχουμε ότι

$$\iiint_W e^{-z} dxdydz = \int_{-1}^{1} e^{-z} \cdot \mathcal{I} \, dz = \int_{-1}^{1} e^{-z} \pi(1 - z^2) dz = \cdots = \frac{4\pi}{e},$$

και κατά συνέπεια

$$[f]_{av} = \frac{\frac{4\pi}{e}}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{e}.$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει το ολοκήρωμα $\iiint_W e^{-z} dxdydz$ απλώς χρισιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες.