Θεώρημα Taylor

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $f : U \to \mathbb{R}, C^k$ συνάρτηση, $0 \leqslant r \leqslant k$ φυσικός, $x \in U, h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$D_r f(x)(h) := \sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_r \leqslant n} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_r}$$

Πολυώνυμο Taylor τάξης r της f στο x_0 είναι το $T_{r,x_0} f$ με

$$T_{r,x_0} f(x) := f(x_0) + \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j!} D_j f(x_0)(x - x_0)$$

Θεώρημα Taylor: f όπως πιο πάνω, $x_0 \in U$. Τότε

$$f(x) = T_{k,x_0}(x) + o(||x - x_0||^k)$$

για $x \to x_0$. [Δηλαδή, για την $R(x) := f(x) - T_{k,x_0}(x)$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} R(x)/||x - x_0||^k = 0$.]

Θετικά ορισμένοι πίνακες

Έστω $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας. Ο A λέγεται[1]
Θετικά ορισμένος αν $x^t A x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
Αρνητικά ορισμένος αν $x^t A x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
Αόριστος αν υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x^t A x < 0$ και $y^t A y > 0$.
Παρατηρούμε ότι

$$x^t A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Αν ο A είναι διαγώνιος με στοιχεία $c_1, c_2, \ldots, c_n$ στη διαγώνιο, τότε

$$x^t A x = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_n x_n^2.$$

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A (είναι πραγματικές γιατί ο A είναι συμμετρικός).

Πρόταση:

$$\begin{aligned} A \text{ θετικά ορισμένος} &\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0 \\ \text{A αρνητικά ορισμένος} &\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0 \\ \text{A αόριστος} &\Leftrightarrow \text{Υπάρχουν δύο ετερόσημες ιδιοτιμές.} \end{aligned}$$

Θεώρημα. (Sylvester) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας.

$$\begin{aligned} A \text{ θετικά ορισμένος} &\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \cdots, \Delta_n > 0 \\ \text{A αρνητικά ορισμένος} &\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \cdots, (-1)^n \Delta_n > 0 \quad \text{(δηλαδή τα πρόσημα πάνε εναλλάξ)} \\ \text{A αόριστος} &\Leftarrow \text{Το πρώτο } \Delta_k \text{ που χαλάει και τα δύο μοτίβα είναι } \neq 0. \end{aligned}$$

Άλλο κριτήριο: Αν $\Delta_n \neq 0$ και ο A δεν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, τότε ο A είναι αόριστος.
(Γιατί τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές, αφού έχουν γινόμενο $\Delta_n \neq 0$, και εφόσον δεν είναι θετικά ορισμένος ή αρνητικά ορισμένος, υπάρχουν δύο ετερόσημες ιδιοτιμές)

[1]Υπενθύμιση: Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ το θεωρούμε ως πίνακα-στήλη. Το ανάστροφό του, $x^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, είναι πίνακας-γραμμή.

Τοπικά ακρότατα

Εστω f όπως πιο πάνω, με $k \geqslant 2$, και $x_0 \in U$ με $\nabla f(x_0) = 0$. Εσσιανός πίνακας είναι ο $n \times n$ πίνακας

$$Hf(x_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Όλες οι παράγωγοι στον πίνακα είναι υπολογισμένες στο x_0 αλλά το παραλείπουμε για συντομία.

$$\begin{aligned} Hf(x_0) \text{ θετικά ορισμένος } &\Rightarrow \text{ το } x_0 \text{ σημείο τοπικού ελαχίστου} \\ Hf(x_0) \text{ αρνητικά ορισμένος } &\Rightarrow \text{ το } x_0 \text{ σημείο τοπικού μεγίστου} \\ Hf(x_0) \text{ αόριστος } &\Rightarrow \text{ το } x_0 \text{ σαγματικό σημείο} \end{aligned}$$

Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής

Θεώρημα. Έστω $G \subset \mathbb{R}^2$ στοιχειώδες χωρίο και $T : G \to \mathbb{R}^2$ συνάρτηση που είναι 1-1 και C^1 στο G° (εσωτερικό του G). Θέτουμε $D = T(G)$. Για κάθε $f : D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ισχύει ότι

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{T^{-1}(D)} f(T(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dudv \tag{1}$$

Δηλαδή στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους κάναμε την αλλαγή μεταβλητών $(x,y) := T(u,v)$. Στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, το $T^{-1}(D)$ είναι το G, αλλά αυτή η γραφή είναι πιο βοηθητική.
Κάνουμε την αλλαγή αν στο δεξί μέλος το χωρίο ολοκλήρωσης ή ο ολοκληρωτέος είναι πιο βολικός από τα αντίστοιχα του αριστερού μέλους, ιδανικά και τα δύο.

Μεθοδος. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy.$$

1. Βρίσκουμε επεικόνιση $T : A \to \mathbb{R}^2$ ώστε $T(A) \supset D$ (επομένως το A είναι αρκετά μεγάλο σύνολο).
2. Βρίσκουμε $G \subset A$ ώστε $T(G) = D$ και στο G° η T να είναι 1-1.
3. Με αυτά τα T, G εφαρμόζουμε τον τύπο (1).

Για παράδειγμα, στον πολικό μετασχηματισμό, μπορούμε να παίρνουμε $A = [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, T(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$, αλλά ανάλογα το ολοκλήρωμα περιορίζουμε την T σε κατάλληλο σύνολο $G \subset A$, π.χ., $G = [1,2] \times [0,2\pi]$ αν το χωρίο D είναι ο δακτύλιος με εσωτερικό κύκλο ακτίνας 1 και εξωτερικό ακτίνας 2 [και οι δύο με κέντρο το $(0,0)$]. Η T δεν είναι 1-1 στο G, είναι όμως στο G°.