Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

1η Σειρά Ασκήσεων

1. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$ με τα επίπεδα συντεταγμένων.

2. Δείξτε ότι η ευθεία $\mathbf{l}(t) = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$ είναι παράλληλη με το επίπεδο $2x - 3y + z - 2 = 0$.

3. Δείξτε ότι η ευθεία $\mathbf{l}(t) = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $5x - 3y - z - 6 = 0$.

4. Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα ορθογώνια και τα δύο προς το διάνυσμα $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

5. Βρείτε την ευθεία που περνάει από το σημείο $A(3, 1, -2)$ και τέμνει υπό ορθή γωνία την ευθεία $x = t - 1,\ y = t - 2,\ z = t - 1$.

6. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις για διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ερμηνεύστε αυτές τις σχέσεις γεωμετρικά, θεωρώντας το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

(α) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (Κανόνας του παραλληλογράμμου)

(β) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

Εξετάστε σε ποια περίπτωση αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

7. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες και ερμηνεύστε τις γεωμετρικά, θεωρώντας το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

$$\text{(α)} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \iff (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$$

$$\text{(β)} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

8. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς k, αποδείξτε ότι αν $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \cdots \|\mathbf{x}_k\|$$

και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_i \geq 0$ και $\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{y}$, για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

9. Υπολογίστε:

(α) Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0, 0, 0),\ B(1, 1, 1),\ \Gamma(0, 2, -3)$.

(β) Τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},\ 5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ και $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

10. Βρείτε μια εξίσωση για καθένα από τα παρακάτω επίπεδα:

(α) Το επίπεδο που είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (3, -1, 1) + (5, 0, 2)t$ και περνάει από το σημείο $(5, -1, 0)$.

(β) Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία $(2, -1, 3),\ (0, 0, 5)$ και $(5, 7, -1)$.

(γ) Το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathbf{l}(t) = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x + y - 3z + 4 = 0$.

11. Βρείτε την απόσταση του σημείου $(6, 1, 0)$ από το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

12. Έστω $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, ορθογώνια ανά δύο. Αν $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \rho\mathbf{w}$, δείξτε ότι $\lambda = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$, $\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$ και $\rho = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$. Ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτό το αποτέλεσμα.

13. (α) Εξετάστε αν ισχύει γενικά $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ για τρία διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ στον $\mathbb{R}^3$.

(β) Αν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$, δείξτε ότι το $\mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

14*. (α) Αποδείξτε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$.

(β) Αποδείξτε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ αν και μόνο αν $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

2η Σειρά Ασκήσεων
Γραφήματα συναρτήσεων - Όρια - Συνέχεια

1. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις, σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης και τις τομές του γραφήματος με τα επίπεδα xz και yz. Με βάση αυτά, περιγράψτε το γράφημα της συνάρτησης.
(α) $f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
(β) $f(x,y) = 2x - y + 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
(γ) $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
(δ) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
(ε) $f(x,y) = e^x, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

2. Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να περιγράψετε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

3. Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = y^2 + z^2$.

Στις Ασκήσεις 4 - 10 εξετάστε αν υπάρχει το όριο και, αν ναι, υπολογίστε το.

4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

5.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

6.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sin(x^2+y^2)}$$

7.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}$$

8.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

9.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y + x^2 y}{x^2+y^4}$$

10.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\neq y\}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\frac{xy}{x-y}.$$

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $\lambda>0$, $\lambda\neq 1$, το όριο του $f(x,y)$ καθώς το (x,y) τείνει προς το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στην καμπύλη $y=x^\lambda$ είναι ίσο με 0.

(β) Αποδείξτε ότι - παρόλο που ισχύει το (α) - το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Δείξτε ότι τα διαδοχικά όρια $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ υπάρχουν και είναι ίσα, αλλά το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

13. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha>0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου α η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

14. Για τις διάφορες τιμές του $\beta>0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\frac{x^2\sin y}{(x^2+y^2)^\beta}.$$

Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου β η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

3η Σειρά Ασκήσεων

Μερικές παράγωγοι - Διαφορικό - Κατευθυνόμενες παράγωγοι

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων, εφ' όσον υπάρχουν.

$$\text{(α) } f(x,y) = e^{xy}, \quad \text{(β) } f(x,y) = x\cos x\cos y, \quad \text{(γ) } f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2),$$

$$\text{(δ) } f(x,y,z) = xyze^{x^2+y^2}, \quad \text{(ε) } f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \quad \text{(στ) } f(x,y) = (x+y, x-y, xy),$$

$$\text{(ζ) } f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{(η) } f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \quad \text{(ϑ) } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

2. Εξετάστε ποιες από τις συναρτήσεις της Άσκησης 1 είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

3. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται σε καθεμιά από τις παρακάτω επιφάνειες στο δεδομένο σημείο. Αιτιολογήστε την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου σε κάθε περίπτωση:
(α) $z = x^2 + y^3$ στο σημείο $(3, 1, 10)$.
(β) $z = e^{x-y}$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

4. Γιατί μπορούμε να πούμε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ εφάπτονται στο σημείο $(0, 0, 0)$;

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{αν} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{και} \quad f(0,0) = 0.$$

Να δείξετε ότι:
(α) Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$, αλλά
(β) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ αν } (x,y) \neq (0,0) \text{ και } f(0,0) = 0.$$

Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

7. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ποιο είναι το διαφορικό $Df(\mathbf{a})$ της f στο $\mathbf{a}$;

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z) = z^2e^x\cos y$. Βρείτε την κλίση της στο σημείο $(0, 2\pi, 1)$ και το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματός της στο σημείο $(0, 2\pi, 1, 1)$.

9. Βρείτε τις κατευθυνόμενες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεω στα σημεία και στις κατευθύνσεις που δίνονται:
(α) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y), \quad (x_0, y_0) = (0, -1), \quad \mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$.

(β) $f(x,y) = xy^2 + x^3y, \quad (x_0, y_0) = (4, -2), \quad \mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$.

(γ) $f(x,y,z) = e^x + yz, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

10. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις, βρείτε την κατεύθυνση στην οποία αυξάνει πιο γρήγορα στο σημείο $(1,1)$. Στη συνέχεια, σχεδιάστε ένα διάγραμμα καμπυλών στάθμης της συνάρτησης και τοποθετήστε το διάνυσμα που δίνει αυτή την κατεύθυνση, με αρχή το σημείο $(1,1)$. Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης που περιλαμβάνει το $(1,1)$.

(α) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(β) $g(x,y) = x^2 - y^2$.

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h(x,y) = 3e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ δίνει το ύψος ενός βουνού, πάνω από κάθε σημείο (x,y) του οριζόντιου επιπέδου. Ξεκινώντας από το σημείο $(1,0)$ σε ποια κατεύθυνση πρέπει να αρχίσει να προχωράει κάποιος για να σκαρφαλώσει γρηγορότερα;

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

4η Σειρά Ασκήσεων
Κλίση - Κατευθυνόμενες παράγωγοι - Εφαπτόμενα επίπεδα

Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας στάθμης. Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0) \in U$ με $f(x_0, y_0, z_0) = c$. Θεωρούμε την επιφάνεια στάθμης της f στην οποία ανήκει το $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$, δηλαδή την επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση: $f(x, y, z) = c$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{a}$, τότε κατά μήκος κάθε διανύσματος $\mathbf{v}$ που εφάπτεται στην S στο σημείο $\mathbf{a}$ η f τείνει να μείνει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ θα είναι 0, δηλαδή $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = 0$, για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ που εφάπτεται στην S στο σημείο $\mathbf{a}$. Συμπεραίνουμε ότι, αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$ και $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, τότε:

(α) Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(\mathbf{a})$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στάθμης S της f που περιέχει το $\mathbf{a}$.

(β) Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στάθμης S στο σημείο $\mathbf{a}$ είναι το επίπεδο που ορίζεται απο την εξίσωση:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0\ ,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a})(z - z_0) = 0\ .$$

Το ανάλογο ισχύει και στις δύο διαστάσεις: Η εφαπτομένη ευθεία μιας καμπύλης στάθμης C της μορφής $f(x, y) = c$ για μια διαφορίσιμη συνάρτηση f στο σημείο $\mathbf{a} = (x_0, y_0) \in C$, αν $\nabla f \neq \mathbf{0}$, δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})(y - y_0) = 0\ .$$

1. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο καθεμιάς από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που υποδεικνύεται:
(α) $3xy + z^2 = 4$ στο $(1, 1, 1)$.
(β) $y^2 - x^2 = 3$ στο $(1, 2, 8)$.
(γ) $xyz = 1$ στο $(1, 1, 1)$.
(δ) $z = (\cos x)(\sin y)$ στο $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$.

2. Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε καθεμιά από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που δίνεται:
(α) $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ στο $(0, 0, 2)$.
(β) $\cos(xy) = e^z - 2$ στο $(1, \pi, 0)$.

3. Θυμηθείτε τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ του γραφήματος της συνάρτησης $z = f(x, y)$ και αποδείξτε ότι αυτός μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού αν δούμε το γράφημα σαν μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή ότι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x, y) = g(x)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη, υπολογίστε την ∇f συναρτήσει της g'. Σχεδιάστε ένα πιθανό διάγραμμα ισοσταθμικών καμπυλών της f και τοποθετήστε πάνω σε αυτό κάποια διανύσματα κλίσης ∇f.

5. Βρείτε την κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης και την κατεύθυνση της ταχύτερης μείωσης για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο $(0, 0)$, αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Ανάλυση II

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

5η Σειρά Ασκήσεων
Ο κανόνας της αλυσίδας - Πολλαπλές μερικές παράγωγοι

1. Έστω $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ και $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$. Να υπολογιστεί το διαφορικό $D(f\circ g)(1,1)$.

2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση της κλάσης C^1 και $z = f(x,y)$. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ (πολικές συντεταγμένες). Να υπολογιστεί η $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις της κλάσης C^2. Θέτουμε $F(x,y) = f(x+g(y))$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τύπους για τις παραγώγους της F πρώτης και δεύτερης τάξης συναρτήσει των παραγώγων των f και g. Αποδείξτε επίσης ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Αν $h = f\circ g$, δείξτε ότι

$$\|\nabla h(x,y,z)\|^2 = 4g(x,y,z)\cdot\big(f'(g(x,y,z))\big)^2$$

και ότι η διεύθυνση του διανύσματος της κλίσης $\nabla h(x,y,z)$ συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης του σημείου (x,y,z). Δώστε γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος με βάση τη μορφή που έχουν οι επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης h.

5. Για καθεμιά από τις ακόλουθες συναρτήσεις, εξακριβώστε ότι οι μεικτές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ είναι ίσες:

$$(\alpha)\ f(x,y) = x^4+y^4-4x^2y^2,\quad (\beta)\ f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ (x,y)\neq(0,0),$$

$$(\gamma)\ f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0),\quad (\delta)\ f(x,y) = \tan\big(\frac{x^2}{y}\big),\ y\neq 0$$

6. Επαληθεύστε τη σχέση $f_{xz\omega} = f_{z\omega x}$ για τη συνάρτηση $f(x,y,z,\omega) = e^{xyz}\sin(x\omega)$.

7. Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $z = \sin(x^2-3xy)$ και (β) $z = x^2y^2e^{2xy}$.

8. Μια συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U ανοικτό) λέγεται *αρμονική* αν είναι της κλάσης C^2 και ικανοποιεί την *εξίσωση Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{στο } U.$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

(α) $f(x,y) = x^3-3xy^2$, (β) $f(x,y) = e^x\cos y$ και (γ) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$ είναι αρμονικές.

9. Λέμε ότι οι C^1 συναρτήσεις $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U ανοικτό) ικανοποιούν τις *εξισώσεις Cauchy - Riemann* (C-R), αν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \, .$$

Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη συναρτήσεων ικανοποιούν τις εξισώσεις C-R;

$$\text{(α) } u(x,y) = e^{-x}\cos y, \;\; v(x,y) = e^{-x}\sin y, \quad \text{(β) } u(x,y) = x^2 + y^2, \;\; v(x,y) = 2xy,$$
$$\text{(γ) } u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \;\; v(x,y) = 3x^2y - y^3,$$
$$\text{(δ) } u(x,y) = \ln(x^2+y^2), \;\; v(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x}, \quad \text{στο } U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

10. Αποδείξτε το ακόλουθο *Θεώρημα Μέσης Τιμής* για συναρτήσεις δύο μεταβλητών:
Υποθέτουμε ότι $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ με την ιδιότητα ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} : 0 \leq t \leq 1\}$ περιέχεται στο D. Αν η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, τότε υπάρχει $\mathbf{z} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ με $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

(*Υπόδειξη:* Εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις μιας μεταβλητής στη συνάρτηση $h = f \circ \sigma$, όπου $\sigma : [0,1] \to D$ η συνάρτηση $\sigma(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.)
Το ίδιο θεώρημα ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις n μεταβλητών, για κάθε $n \geq 1$.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

6η Σειρά Ασκήσεων
Καμπύλες στο χώρο - Θεώρημα Taylor

1. Προσδιορίστε τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης για καθεμιά από τις παρακάτω καμπύλες για τη δοθείσα τιμή του t:

$$\text{(α)}\quad \sigma(t) = \left(\sin^2 t, t^2 - 1, \frac{1}{t}\right),\ t = 1, \qquad \text{(β)}\quad \sigma(t) = (0, t, 0)\,,\ t = \frac{1}{2}$$

2. Να βρεθεί η καμπύλη σ αν $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ και $\sigma'(t) = \left(t, e^t, t^2\right)$.

3. Να υπολογιστεί το μήκος των καμπυλών:
(α) $\sigma(t) = \mathbf{a} + r(\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right],\ r > 0,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
(β) $\sigma(t) = (t, t^n)\,, \quad t \in [0, 1]$, όπου $n \geq 1$.
(γ) $\sigma(t) = (t^n, t^n)\,, \quad t \in [0, 1]$, όπου $n \geq 1$.

4. Έστω $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ μία C^∞ διαφορίσιμη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι $\sigma'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in [a, b]$. Το διάνυσμα

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

- το οποίο εφάπτεται στη σ στο $\sigma(t)$ και έχει $\|T(t)\| = 1$ - λέγεται το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της σ στο $\sigma(t)$.
(α) Αποδείξτε ότι $T'(t) \cdot T(t) = 0$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε τη σχέση $T(t) \cdot T(t) = 1$.)
(β) Γράψτε έναν τύπο για το $T'(t)$ συναρτήσει της σ.

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία κατά τμήματα C^1 συνάρτηση. Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$, έχει μήκος το οποίο ισούται με

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt\,.$$

6. Να βρεθούν τα πολυώνυμα Taylor 2ης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$ για τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$\text{(α)}\ f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad \text{(β)}\ f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$$

$$\text{(γ)}\ f(x, y) = xe^y, \qquad \text{(δ)}\ f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$$

7. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$ για τη συνάρτηση $f(x, y) = e^x \sin y$. Εκτιμήστε το λάθος στην προσέγγιση της f από αυτό το πολυώνυμο, όταν $|x| \leq 0,1$ και $|y| \leq 1$.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

7η Σειρά Ασκήσεων
Τοπικά ακρότατα συναρτήσεων - Πολλαπλασιαστές Lagrange

1. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:
$f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y \ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

2. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης:
$f(x,y,z) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + z^2 \ , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

3. Να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων:

$$(\alpha) \ \ f(x,y) = e^{xy} \ , \quad (\beta) \ \ f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2xy \ , \quad (\gamma) \ \ f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$$

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ έχει ένα κρίσιμο σημείο το οποίο δεν είναι τοπικό ακρότατο. Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της f.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

(α) Δείξτε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$.

(β) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f, αλλά όχι τοπικό ελάχιστο αυτής.

6. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^2$ υπό τη συνθήκη $xy = 1$.

7. Έστω $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$.
Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της f στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ είναι $\frac{R^6}{27}$.

8. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z) = x + y + z$ υπό τις συνθήκες $x^2 + y^2 = 2$ και $x + z = 1$.

9. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z) = xyz$ υπό τις συνθήκες $x^2 + y^2 = 3$ και $y = 2z$.

10. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z) = xy + xz$ υπό τις συνθήκες $2x + 3z = 5$ και $xy = 4$.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

8η Σειρά Ασκήσεων
Διπλό ολοκλήρωμα σε Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες

1. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 dydx$$

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και γράψτε το ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη. Στη συνέχεια υπολογίστε το I και με τους δύο τρόπους .

2. Υπολογίστε τα ολοκλήρωματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} dydx \ , \quad I_2 = \int_0^1 \int_y^1 x^3 y e^{xy^2} dxdy$$

$$I_3 = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx \ , \qquad I_4 = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$$

3. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από κάτω από το xy επίπεδο, από πάνω απο την επιφάνεια $z = 1 + x^2$ και από τα πλάγια από το επίπεδο $y = x$ και την επιφάνεια $y = 2 - x^2$.

4. Βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x, y) = 1$, η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2 + y^2 = 1$ στο πρώτο τεταρτημόριο. (Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής πλάκας D ως προς την αρχή δίνεται από τον τύπο: $I = \int\int_D (x^2 + y^2)\delta(x, y)dxdy$.)

4. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα, μετατρέποντάς τα σε πολικές συντεταγμένες:

$$I_1 = \int\int_D \sin(x^2 + y^2) dxdy \ ,$$

όπου D το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

$$I_2 = \int\int_K \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} dxdy \ ,$$

όπου $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ 1 \leq 2y \leq 2\}$.

$$I_3 = \int\int_T x dxdy \ ,$$

όπου $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ και } \ y \geq x\}$.

5. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$J_R = \int\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \ ,$$

όπου D_R το χωρίο που ορίζεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2 + y^2 = R^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x^2} dx.$$

(*Υπόδειξη:* Αν $I_b = \int_0^b e^{-x^2} dx$, δείξτε ότι $I_b^2 = \int_0^b \int_0^b e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ και, στη συνέχεια, ότι $\lim_{b \to +\infty} I_b^2 = \lim_{R \to +\infty} J_R$.)

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

9η Σειρά Ασκήσεων
Τριπλό ολοκληρωμα - Αλλαγή μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκληρώματα

1. Δίνονται τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 f(x,y,z)dydzdx \ , \qquad I_2 = \int_1^2 \int_0^{z-1} \int_0^x f(x,y,z)dydxdz \ .$$

(α) Σχεδιάστε τα αντίστοιχα στερεά χωρία ολοκλήρωσης B_1 και B_2. Στη συνέχεια, γράψτε τα I_1, I_2 με σειρά ολοκλήρωσης $dzdydx$.

(β) Υπολογίστε τον όγκο των στερεών B_1 και B_2.

2. Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int\int\int_B xdxdydz$, όπου B το στερεό που φράσσεται από το παραβολοειδές $y = x^2+z^2$ και το επίπεδο $y = 1$.

(β) $\int\int\int_B yzdxdydz$, όπου B το στερεό στο 1ο ογδοημόριο που φράσσεται από τα επίπεδα των συντεταγμένων και το ημισφαίριο $x = \sqrt{9-(y^2+z^2)}$.

3. Δίνεται το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2)^{3/2} dzdydx.$$

Περιγράψτε ή σχεδιάστε το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

4. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2 = 2y$, τον κώνο $z = \sqrt{x^2+y^2}$ και το επίπεδο $z = 0$.

5. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ πάνω στον κύλινδρο $x^2+y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

(β) Δείξτε ότι η επιφάνεια $z = x^2+y^2$ χωρίζει τον κύλινδρο $x^2+y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq a^2$, σε δύο στερεά χωρία που έχουν ίσους όγκους.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int\int\int_S \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \ , \qquad I_2 = \int\int\int_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ e^{-(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz \ ,$$

όπου S είναι το στερεό που περιβάλλεται από τις σφαίρες $x^2+y^2+z^2 = a^2$ και $x^2+y^2+z^2 = b^2$ $(0 < a < b)$.

7. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες υπολογίστε τον όγκο του στερεού που αποκόπτει από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ ο κώνος $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

8. (α) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = au$, $y = bv$. Στη συνέχεια, υπολογίστε το ολοκλήρωμα πάνω στο E της συνάρτησης $f(x,y) = x^2$.

(β) Υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό και στη συνέχεια σφαιρικές συντεταγμένες.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

10η Σειρά Ασκήσεων
Επικαμπύλια Ολοκληρώματα - Διανυσματικά Πεδία

1. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα δευτέρου είδους:

(α) $\int_\sigma (x^2 - y^2)dx + xdy$, όπου $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$.

(β) $\int_C x^2 ydx - xydy$, όπου C είναι η καμπύλη που ξεκινά από το $(0,0)$, πηγαίνει στο $(1,1)$ μέσω της παραβολής $y = x^2$ και επιστρέφει στο $(0,0)$ επί της ευθείας $y = x$.

2. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\sigma_i} ydx,\ (i = 1, 2)$, όπου $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $\sigma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Τι παρατηρείτε; (*Απάντηση*: $\int_{\sigma_1} ydx = -\pi$ και $\int_{\sigma_2} ydx = -2\pi$.)

3. Έστω $F = (x^2 - y^2)i + 2xyj$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί το ολικό έργο που παράγει αυτό το διανυσματικό πεδίο όταν μετακινεί αντιωρολογιακά μια σημειακή μάζα στην περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0),\ (2,0),\ (2,2),\ (0,2)$.

4. Να βρεθεί το έργο που παράγει το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $F = (x^2 + y^2)i + (x + y)j$ όταν μετακινεί αντιωρολογιακά ένα υλικό σημείο επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ από το $(1,0)$ στο $(-1,0)$ και κατόπιν πίσω στο $(1,0)$ πάνω στον άξονα των x.

5. Αποδείξτε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα A είναι συντηρητικό πεδίο αν και μόνο αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας.

6. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{R}^2$ συνάρτηση της κλάσης C^1 με $f = (u, v)$. Η f λέγεται *ολόμορφη* συνάρτηση αν ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy και Riemann:

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta x} = \frac{\vartheta v}{\vartheta y} \quad \text{και} \quad \frac{\vartheta u}{\vartheta y} = -\frac{\vartheta v}{\vartheta x} \ .$$

Αποδείξτε ότι, αν $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικός τόπος και η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}^2$ με $f = (u, v)$ είναι ολόμορφη, τότε οι $g = (v, u)$ και $h = (u, -v)$ είναι συντηρητικά πεδία στο D.

7. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F = (e^x \sin y - y, e^x \cos y - x - 2)$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού f για την F.

8. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο της κλάσης C^1 με $F = (F_1, F_2, F_3)$. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{\vartheta F_2}{\vartheta z} = \frac{\vartheta F_3}{\vartheta y}, \quad \frac{\vartheta F_1}{\vartheta z} = \frac{\vartheta F_3}{\vartheta x} \ \text{και} \ \frac{\vartheta F_2}{\vartheta x} = \frac{\vartheta F_1}{\vartheta y}.$$

9. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο
$F(x, y) = (f(x) + y,\ g(y) + x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι συντηρητικό.

10. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2 - e^{-z})$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για αυτό.

11. Έστω
$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2}\right).$$
Αν $f(0,0,0)=5$, βρείτε το $f(1,1,2)$.

12. Υπολογίστε το $\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2dz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $(1,1,1)$ με το $(1,2,4)$.

Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

11η Σειρά Ασκήσεων
Επαναληπτικές Ασκήσεις
Αναπτύγματα Taylor, Ακρότατα συναρτήσεων, Πολλαπλασιαστές Lagrange
Πολλαπλά ολοκληρώματα

1. (α) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0,0)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = \sin x \cdot \cos y.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x \cos y - 1 - x - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = 0.$$

2. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία των ακόλουθων συναρτήσεων και ταξινομήστε το καθένα από αυτά ως τοπικό ακρότατο ή σαγματικό σημείο:

(α) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ (β) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$

3. (α) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z) = x - y + z$ επί της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ υπό τη συνθήκη $x-2y+3z = 4$.

4. Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και στη συνέχεια υπολογίστε καθένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy \ , \qquad I_2 = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx \ .$$

5. Βρείτε τον όγκο των παρακάτω στερεών:

(α) Του στερεού K, το οποίο έχει βάση το χωρίο του επιπέδου xy που ορίζεται από την παραβολή $y = 4 - x^2$ και την ευθεία $y = 3x$ και φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z = x + 4$.

(β) Του στερεού L που βρίσκεται στο 1ο ογδοημόριο και φράσσεται από τα επίπεδα των συντεταγμένων, από το επίπεδο $x = 3$ και από τον παραβολικό κύλινδρο $z = 4 - y^2$.

6. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτει από το 1ο τεταρτημόριο η καρδιοειδής καμπύλη $r = 1 + \sin\theta$.

7. Βρείτε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

πάνω από το χωρίο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le e\}$.

8. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dx dy \ .$$

9. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από κάτω από το επίπεδο xy, στο πλάι από τη σφαίρα $\rho = 2$ και από πάνω από τον κώνο $\phi = \frac{\pi}{3}$.

10. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τους κυλίνδρους $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$ και τους κώνους $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.