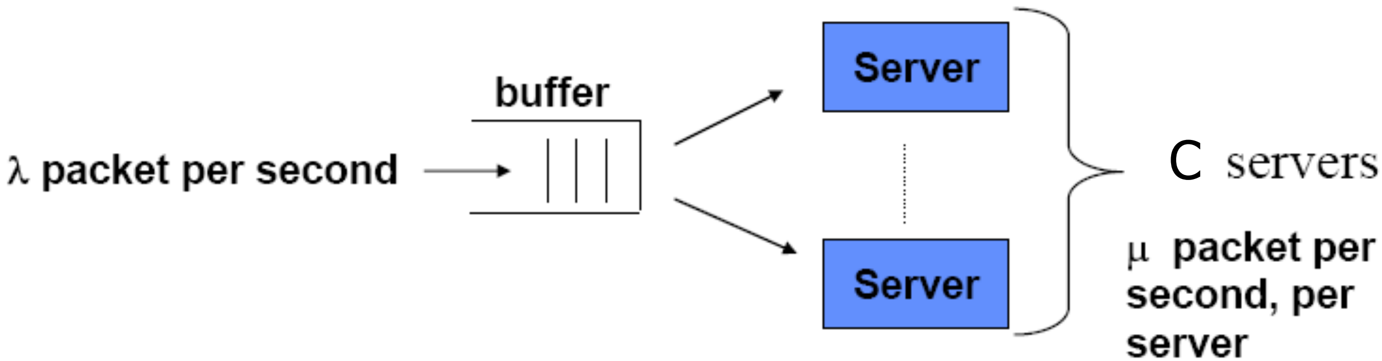
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Δίκτυα Επικοινωνιών

Ασκήσεις σε Συστήματα Ουρών

Άννα Τζανακάκη
Τμήμα Φυσικής
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

M/M/C: Example



- Departure rate is proportional to the number of servers in use

M/M/C: Example

- Το σύστημα μας αποτελείται από ένα σετ από servers
- $N_s(t)$ = ο αριθμός των πελατών που εξυπηρετούνται την χρονική στιγμή t
- τ = service time

Little's formula

$$E[N_s] = \lambda E[\tau] \qquad (1)$$

όπου E $[N_s]$ είναι ο μέσος αριθμός busy servers για ένα σύστημα σε steady-state.

<u>Note</u>: Για ένα single-server system (M/M/1), το $N_s(t)$ μπορεί μόνο να είναι 0 ή 1, οπότε το $E[N_s]$ αντιστοιχεί στον διάστημα στο οποίο ο server είναι busy.

Αν P_0 είναι η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο τότε

$$1 - P_0 = E[N_s] = \lambda E[\tau] \qquad (2)$$

or

$$P_0 = 1 - \lambda E[\tau] \qquad (3)$$

M/M/C: Example (cont)

Το utilization ενός Single-Server System είναι

$$\rho = \lambda E[\tau] \qquad (4)$$

Ομοίως, το utilization ενός *C*-Server System είναι

$$\rho = \frac{\lambda E[\tau]}{C} \qquad (5)$$

Note: Από την (5), το ρ αντιστοιχεί στο μέσο ποσοστό (average fraction) busy servers

Πρόβλημα 1: M/M/1 (fast food restaurant)

Πελάτες φτάνουν σε ένα εστιατόριο fast food με ρυθμό 100 την ώρα και χρειάζονται κατά μέσο όρο 30 seconds για να εξυπηρετηθούν.

- Πόσο χρόνο περνάνε κατά μέσο όρο στο σύστημα?
  - Service rate = μ = 2 customers per minute = 120 customers per hour
  - $T = 1/\mu - \lambda = 1/(120-100) = 1/20$ hrs = 3 minutes
- Πόσο χρόνο κατά μέσο όρο περνάνε περιμένοντας στην ουρά?
  - $W = T - 1/\mu = 2.5$ minutes
- Πόσοι πελάτες βρίσκονται κατά μέσο όρο μέσα στο εστιατόριο?
  - $N = \lambda T = 5$
- Ποιο είναι το utilization του server?
  - $\rho = \lambda/\mu = 5/6$

Πρόβλημα 2

- Inquiries φτάνουν σε ένα information center σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό 6 inquiries per second. O χρόνος που παίρνει να γίνει η επεξεργασία κάθε inquiry είναι εκθετικά κατανεμημένος (exponentially distributed) με μέση τιμή 0.5 seconds.
  a. Υποθέστε ότι το information center έχει 5 servers για να επεξεργαστεί τα inquiries, και αν όλοι οι servers είναι busy, κάθε καινούριο inquiry που φτάνει θα είναι blocked. Βρείτε την πιθανότητα που ένα καινούριο inquiry θα είναι blocked.
  b. Με την ίδια υπόθεση όπως στο (a), βρείτε το μέσο αριθμό inquiries που κάποιος θα δει στο σύστημα.
  c. Αν κάποιος θέλει να κρατήσει το blocking probability κάτω από 3%, πόσους παραπάνω servers πρέπει να προσθέσει στο σύστημα?

Λύση

- Αυτό είναι ένα M/M/C/C σύστημα με τις παρακάτω παραμέτρους:
- a = λ/(Cμ) = 6*0.5 = 3, C = 5.
- Ένα incoming inquiry θα είναι blocked αν όλοι οι servers είναι busy. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι ίση με την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση C.

$$P[N = C] = \frac{a^C}{C!} P_0$$

- Όπου

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^{C} \frac{a^j}{j!} \right)^{-1}$$

- Αντικαθιστώντας και C στην εξίσωση βρίσκουμε, το blocking probability P_b=0.1101

- Ο μέσος αριθμός των inquiries στο σύστημα μπορεί να υπολογιστεί από την Little's formula.
- $E[N] = \lambda_a * E[t]$
- όπου $\lambda_a = (1 - P_b)\lambda$ είναι το effective arrival rate
- και $E[t] = 1/\mu$ είναι η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης κάθε inquiry
- $E[N] = (1 - 0.1101)*6*0.5 = 2.67$

- Για να κρατήσουμε το blocking probability < 3%, θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη.

- $Pb = P[N = C] < 0.03$

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια λογική όπως στο (a) για να βρούμε το blocking probability.

- Όταν $C = 6$, $P_b = 0.0522$.
- Όταν $C = 7$, $P_b = 0.0219$ το blocking probability είναι < 3%.
- Οπότε πρέπει να προσθέσουμε 2 παραπάνω servers στο σύστημα.

Το σύστημα M/G/1

Pollaczek - Khinchine (P - K) formula

$$W = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$ (Μέσος χρόνος στην ουρά)

$$T = E\{X\} + \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$ (Μέσος χρόνος στο σύστημα)

$$N = \lambda T$$ (Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα)

$$\rho = \lambda / \mu$$

M/G/1 examples

M/D/1 Queue: Deterministic service times all equal to $1/\mu$

- $E[X] = \frac{1}{\mu}, \quad E[X^2] = \frac{1}{\mu^2}$
- $E[W] = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}, \quad E[Q] = \frac{\lambda^2 E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$
- $E[T] = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)}, \quad E[N] = \lambda E[T] = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}$

M/M/1 Queue: Exponential service times with mean $1/\mu$

- $E[X] = \frac{1}{\mu}, \quad E[X^2] = \frac{2}{\mu^2}$
- $E[W] = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \quad E[Q] = \frac{\lambda^2 E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$
- $E[T] = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}, \quad E[N] = \lambda E[T] = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

Πρόβλημα 3

Θεωρήστε μια ουρά M/G/1 στην οποία η εξυπηρέτηση του 1ου πελάτη που βρίσκει το σύστημα άδειο απαιτεί ένα μικρό χρονικό διάστημα T παραπάνω για να εξυπηρετηθεί σε σχέση με τον απαιτούμενο χρόνο εξυπηρέτησης ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα γεμάτο. Ας υποθέσουμε ότι το T ακολουθεί μια κατανομή και είναι ανεξάρτητο από όλες τις άλλες τυχαίες μεταβλητές τους συστήματος. Βρείτε την πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο.

- Έστω S ο κανονικός χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη.
- P_0 η πιθανότητα ότι ένας αφικνούμενος πελάτης βρίσκει το σύστημα άδειο.
- Ένας πελάτης έχει χρόνο εξυπηρέτησης E[S] με πιθανότητα $(1-P_0)$ και χρόνο εξυπηρέτησης (E[S]+E[T]) με πιθανότητα P_0.
- Το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι busy δίνεται ως λ{E[S](1-P0)+(E[S]+E[T])P0}, το οποίο είναι $1-P_0$. Οπότε:

$$P_0 = \frac{1-\lambda E[S]}{1+\lambda E[T]}$$

Πρόβλημα 4

Μεταφορές αρχείων φτάνουν σε ένα network access point σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων Poisson. Το μήκος των μηνυμάτων είναι exponentially distributed με μέση τιμή 5000 bits. Interprocess communication μηνύματα φτάνουν επίσης σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson αφίξεων, το καθένα με μήκος 500 bits. Το κανάλι υποστηρίζει μετάδοση 50kb/sec. 60% του χρόνου καταναλώνεται στην μεταφορά αρχείων. 30% του χρόνου καταναλώνεται σε interprocess communication. Πόσος είναι ο μέσος χρόνος που δαπανά το σύστημα σε κάθε είδους μήνυμα?

Για τα control packets:

- Average transmission time $\frac{1}{\mu_1} = 0.01\text{sec}.$
- The arrival rate is $\lambda_1 = \rho_1 \mu_1 = 30$ packets/sec.
- Variance $\sigma_1^2 = 0$

For file transfers:

- Average transmission time is $\frac{1}{\mu_2} = 0.1\text{sec}.$
- The arrival rate is $\lambda_2 = \rho_2 \mu_2 = 6$ packets/sec.
- The variance is $\sigma_2^2 = \frac{1}{\mu_2^2} = 0{,}01$

Το σύστημα M/G/1

Pollaczek - Khinchine (P - K) formula

$$W = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$ (Μέσος χρόνος στην ουρά)

$$T = E\{X\} + \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$ (Μέσος χρόνος στο σύστημα)

$$N = \lambda T$$ (Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα)

$$\rho = \lambda / \mu$$

- Αυτό είναι μια περίπτωση ουράς M/G/1.
- Average service time $E[\tau]=\dfrac{\rho}{\lambda}=0{,}025\sec.$
- Η ροπή δεύτερης τάξης (second moment) του χρόνου εξυπηρέτησης μηνυμάτων του συνδυασμού των 2 ροών (εφαρμογής και κοντρόλ) δίνεται από τον σταθμισμένο μέσο όρο (the weighted average) των ροπών δεύτερης τάξης των επί μέρους μηνυμάτων:

$$E[\tau^2]=\frac{\lambda_1 E[\tau_1^2]+\lambda_2 E[\tau_2^2]}{\lambda}=0{,}00341$$

- Με το P-K formula για το M/G/1 έχουμε:
- E[W]=615ms.
- Οπότε

$$E[T_1]=E[W]+\frac{1}{\mu_1}=625ms.$$

$$E[T_2]=E[W]+\frac{1}{\mu_2}=715ms.$$