Μάθημα 1

Εισαγωγή

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με μεθόδους εύρεσης ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων και συστημάτων με χρήση αλγεβρικών αλγορίθμων. Οι αλγεβρικοί αλγόριθμοι αφορούν σε αλγεβρικά προβλήματα και, σε αντίθεση με αριθμητικές και αναλυτικές μεθόδους, χαρακτηρίζονται από απόλυτη ακρίβεια αποτελέσματος. Η απαίτηση αυτή καθιστά την υλοποίησή τους σε υπολογιστικές μηχανές πεπερασμένης ακρίβειας δύσκολη, όμως διάφορα υπολογιστικά πακέτα παρέχουν το απαραίτητο υπόβαθρο για να υλοποιηθούν τέτοιοι αλγόριθμοι. Το αντίτιμο είναι το σχετικά υψηλό υπολογιστικό κόστος λόγω της πιθανής έκρηξης του μεγέθους των (ενδιάμεσων) τιμών. Βέβαια το αν οι αριθμητικές μέθοδοι είναι ταχύτερες των αλγεβρικών αποτελεί τη μεγάλη πρόκληση(ανοικτό πρόβλημα) στην υλοποίηση τέτοιων αλγορίθμων.

Η περιοχή των αλγεβρικών αλγορίθμων ονομάζεται επίσης «άλγεβρα με υπολογιστή» (computer algebra), «υπολογιστική άλγεβρα» (computational algebra) ή «συμβολική επεξεργασία» (symbolic computation) διότι επεξεργάζεται σύμβολα: μεταβλητές x, y, πολυώνυμα κλπ.

1.1 Υπολογιστικά Μοντέλα και Ασυμπτωτικοί Συμβολισμοί

Η μελέτη διαφορετικών αλγόριθμων που επιλύουν το ίδιο πρόβλημα απαιτεί τη σύγκρισή τους με κάποιο κοινό μέτρο. Η μαθηματική εκτίμηση των υπολογιστικών πόρων που απαιτεί η εκτέλεση ενός αλγόριθμου ονομάζεται ανάλυση του αλγόριθμου.

Για τις ανάγκες του μαθήματος θα θεωρήσουμε δυο παραλλαγές του μοντέλου RAM(Random Access Machine - Μηχανή Άμεσης Προσπέλασης Μνήμης), στο οποίο οι εντολές εκτελούνται σειριακά και κάθε στοιχειώδες υπολογιστικό βήμα έχει μοναδιαίο κόστος. Σαν στοιχειώδη υπολογιστικά βήματα θεωρούμε τις βασικές αριθμητικές και λογικές πράξεις, την προσπέλαση της μνήμης για ανάγνωση ή εγγραφή καθώς και τις συγκρίσεις, τον υπολογισμό του ακέραιου μέρους, την εξαγωγή μιας τετραγωνικής ρίζας, ενίοτε τον υπολογισμό ενός πηλίκου ή υπολοίπου.

Real RAM (Arithmetic RAM). Στο μοντέλο αυτό κάθε πραγματικός αριθμός αναπαρίσταται με απόλυτη(απεριόριστη) ακρίβεια. Φυσικά κάτι τέτοιο είναι μη ρεαλιστικό. Εδώ το στοιχειώδες υπολογιστικό βήμα είναι η εκτέλεση μιας πράξης (όπως αυτές που αναφέρθηκαν παραπάνω) μεταξύ δυο πραγματικών αριθμών. Η αριθμητική πολυπλοκότητα συμβολίζεται με $O_A(\cdot)$.

Boolean RAM. Για μια ακριβέστερη μελέτη πολυπλοκότητας, χρησιμοποιούμε τη δυαδική RAM. Εδώ βλέπουμε κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{Z}$ ως μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων(bits) μήκους $\lceil \log_2 x \rceil$ στη μνήμη του υπολογιστή ή ακόμη και σαν ακολουθία από λέξεις(words) σε μια ορισμένη αναπαράσταση. Το στοιχειώδες υπολογιστικό βήμα είναι η πράξη μεταξύ δυο ψηφίων(ή λέξεων) της αναπαράστασης του αριθμού. Η δυαδική πολυπλοκότητα συμβολίζεται ως $O_B(\cdot)$.

Ένας αλγόριθμος θα λέμε ότι είναι γραμμικός, αν η πολυπλοκότητά του είναι γραμμική στο μέγεθος της εισόδου. Αντίστοιχα ορίζονται οι πολυωνυμικοί αλγόριθμοι, οι εκθετικοί κοκ. Παρατηρήστε εδώ πως αναλύοντας έναν αλγόριθμο με είσοδο έναν $x \in \mathbb{R}$ στο δυαδικό μοντέλο η είσοδος έχει μέγεθος $\lceil \log_2 x \rceil$, ενώ με χρήση του αριθμητικού μοντέλου η είσοδος έχει μέγεθος 1(ή κάποια σταθερά).

Κάποιες φορές μας ενδιαφέρουν οι μεγαλύτεροι μόνο από τους όρους του γινομένου που εμφανίζονται στην πολυπλοκότητα ενός αλγόριθμου. Τότε θα παραλείπουμε τους λογαριθμικούς παράγοντες και θα συμβολίζουμε με $O_A^*(\cdot)$ ή $O_B^*(\cdot)$. Π.χ. Το γινόμενο δυο πολυωνύμων με τον αλγόριθμο FFT έχει πολυπλοκότητα $O_A(n \log n)$, δηλαδή $O_A^*(n)$(σημειώνεται πως τέτοιοι αλγόριθμοι καλούνται «σχεδόν γραμμικοί»).

Στα παραπάνω το $O(\cdot)$ είναι ο γνωστός συμβολισμός στην ανάλυση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς αλγορίθμων. Η ασυμπτωτική εκτίμηση εξετάζει την τάξη (χρονικού ή ακόμη και χωρικού) μεγέθους του αλγόριθμου, γι αυτό και πρακτικά ενδιαφέρεται για τον κυρίαρχο όρο της ακριβής καταμέτρησης μεγέθους, αγνοώντας τις σταθερές. Ακολουθούν οι τυπικοί ορισμοί των συνηθέστερων ασυμπτωτικών συμβολισμών. Το σύμβολο $'='$ εδώ δε σημαίνει ισότητα, καθώς όπως φαίνεται στους ορισμούς, δηλώνει ότι η f ανήκει σε μια κλάση συναρτήσεων(που περιέχει όλες της συναρτήσεις ίδιας τάξης μεγέθους με αυτήν):

$$f(n) = O(F(n)) \Leftrightarrow \exists N, \exists c : \forall n \geq N : f(n) \leq cF(n)$$

Π.χ.: $67 \ln n = O(\log_2 n), 562n^{34} = O(2^n), O(a+b) = O(\max\{a,b\})$.

$$f(n) = o(F(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(f(n)/F(n)) = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon\exists N, \forall n > N, f(n) < \epsilon F(n)$$

Άρα θέτοντας $\epsilon = c$ βρίσκουμε $f(n) = O(F(n))$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, δες π.χ. $13n^3 \lg n + 37n^{3.1} = O(n^{3.1})$. Ο συμβολισμός $o(\cdot)$ δηλώνει δηλαδή ένα άνω φράγμα που δεν είναι ακριβές(tight).

$$f(n) = \Omega(F(n)) \Leftrightarrow F(n) = O(f(n))$$

Παρόμοια με πριν ορίζεται και ο συμβολισμός $\omega(\cdot)$ για ένα κάτω φράγμα που δεν είναι ακριβές.

$$f(n) = \Theta(F(n)) \Leftrightarrow [\ f(n) = O(F(n))\ \&\ f(n) = \Omega(F(n))\ ]$$

Τέλος, για να αγνοούμε λογαριθμικές ποσότητες, ορίζουμε το «χαλαρό»(soft) όμικρον:

$$f(n) = O^*(F(n)) \Leftrightarrow [\ \exists\ c \in \mathbb{R} : f(n) = O((\log F(n))^c F(n))\ ]$$

Παρατηρήστε ότι μας ενδιαφέρει η ασυμπτωτική συμπεριφορά: το c μπορεί να είναι μια αρκετά μεγάλη δύναμη του λογαρίθμου κι όμως εδώ χαρακτηρίζεται αμελητέο.

1.2 Στοιχεία από την Άλγεβρα

Δίνουμε τώρα μερικούς ορισμούς από την Άλγεβρα, οι οποίοι θα εμφανιστούν στα επόμενα.

Ορισμός 1.2.1. *Ένα σύνολο $(G, \star)$, δηλαδή εφοδιασμένο με μια πράξη $\star : G \times G \to G$ καλείται* ομάδα*(group) αν ικανοποιεί:*

1. *Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, δηλ: $\exists e \in G$ ώστε $a \star e = e \star a = a,\ \forall a \in G$.*
2. *Για κάθε $a \in G$ υπάρχει $a' \in G$ ώστε $a \star a' = a' \star a = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο.*
3. *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλ: $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c,\ \forall a, b, c \in G$.*

Π.χ. η ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$, της οποίας το ουδέτερο στοιχείο είναι το μηδέν.

Ορισμός 1.2.2. *Ένα σύνολο εφοδιασμένο δυο πράξεις $(R, +, *)$, όπου $+, * : R \times R \to R$ καλείται* δακτύλιος*(ring) αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. *Οι πράξεις είναι προσεταιριστικές: $(a + b) + c = a + (b + c),\ (a * b) * c = a * (b * c),\ \forall a, b, c \in R$*
2. *Η $+$ είναι αντιμεταθετική: $a + b = b + a,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$*
3. *Υπάρχει $0 \in R$ ουδέτερο στοιχείο για τη $+$, δηλ: $a + 0 = 0 + a = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$*
4. *Κάθε $a \in R$ έχει αντίστροφο, δηλ: $\forall a \in R,\ \ \exists a' \in R$ ώστε $a + a' = a' + a = 0$(συνήθως συμβολίζουμε τον αντίστροφο με $-a$).*
5. *Η $+$ είναι επιμεριστική ως προς $*$, δηλ: $a * (b + c) = a * b + a * c,\ (b + c) * a = b * a + c * a$*

Αν ο δακτύλιος έχει και ουδέτερο στοιχείο για την $*$, δηλαδή υπάρχει $1 \in R$ ώστε $1 * a = a * 1 = a,\ \forall a \in R$, τότε καλείται δακτύλιος με μονάδα. Αν επιπλέον ισχύει η μεταθετική ιδιότητα για την $*$ τότε έχουμε έναν *μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα.*

Ο $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι παράδειγμα μεταθετικού δακτυλίου με μονάδα, ενώ ο δακτύλιος $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ των 2×2 πινάκων με τις συνήθεις πράξεις δεν είναι μεταθετικός.

Ορισμός 1.2.3. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος $R \neq \{0\}$ με μονάδα, θα λέμε ότι είναι ακέραια περιοχή(integral domain) αν για κάθε $a, b \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή $a * b = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $b = 0$.*

Π.χ. ο $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι ακέραια περιοχή, ενώ ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ των ακεραίων modulo 6 δεν είναι, αφού $3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 0 \pmod 6$.

Ορισμός 1.2.4. Σώμα*(field) ονομάζεται ένας μεταθετικός δακτύλιος $F \neq \{0\}$ με μονάδα, αν για κάθε στοιχείο του διαφορετικό του 0 υπάρχει αντίστροφος ως προς $*$.*

Π.χ. με τις συνήθεις πράξεις τα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ είναι σώματα, ενώ το $\mathbb{Z}$ δεν είναι καθώς μόνο τα στοιχεία ± 1 έχουν πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

Ορισμός 1.2.5. *Αν $(R, +, *)$ ένας δακτύλιος, ένα μη κενό υποσύνολό του $I \subseteq R$ καλείται ιδεώδες του R αν ισχύουν:*

1. *$a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$.*
2. *Αν $c \in R$ και $a \in I$ τότε $c \cdot a, a \cdot c \in I$*

Π.χ. τα πολλαπλάσια του 2(δηλαδή το $2\mathbb{Z}$), ή γενικά το $n\mathbb{Z}$ είναι ιδεώδη του $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
Συνεχίζουμε με στοιχεία από την Θεωρία πραγματικών σωμάτων [Mis93].

Ορισμός 1.2.6. *Ένα σώμα (field) K καλείται* διατεταγμένο *όταν περιέχει ένα υποσύνολο θετικών αριθμών R, κλειστό ως προς τις 2 πράξεις $(+, *)$, τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο $x \in K, x \neq 0$, είτε $x \in R$ είτε $-x \in R$.*

Π.χ. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}(\epsilon), \mathbb{Q}(\epsilon)$ και $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \equiv \mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - 2\rangle$. Αντίθετα, το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο. Σημειώστε πως το $0 < \epsilon \ll 1$ είναι ένας απειροελάχιστος (infinitesimal) θετικός δηλ. μπορούμε να θεωρήσουμε πως $\epsilon \to 0^+$. Το $1/\epsilon$, που ανήκει στο $\mathbb{R}(\epsilon)$, τείνει στο άπειρο.

Τα διατεταγμένα σώματα είναι αναγκαστικά άπειρα και μας παρέχουν την δυνατότητα να μελετήσουμε ανισότητες και διαστήματα. Δηλ. $a > b \Leftrightarrow a - b \in R$. Επίσης, $a > b \Rightarrow a + c > b + c, \forall c$, ενώ $a > b \Rightarrow ac > bc$, $\forall c \in R$.

Ορισμός 1.2.7. *Ένα σώμα K καλείται* κλειστό πραγματικό *όταν είναι διατεταγμένο, κάθε θετικός έχει μια θετική τετραγωνική ρίζα, και κάθε εξίσωση περιττού βαθμού στο $K[x]$ έχει μια ρίζα στο K.*

Π.χ. $\mathbb{R}, \mathbb{R}(\epsilon), \mathbb{R}(\epsilon_1, \epsilon_2)$, αλλά όχι το $\mathbb{Q}$ ούτε η αλγεβρική θήκη $\overline{\mathbb{Q}}$, ούτε το $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Από τους ορισμούς προκύπτει πως για κάθε $p(x) \in K[x]$, όπου το K κλειστό πραγματικό, που είναι μη-παραγοντοποιήσιμο και μονικό (με μοναδιαίο μεγιστοβάθμιο συντελεστή) έπεται πως $\deg p \in \{1, 2\}$. Ειδικότερα, ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο είναι ανάγωγο ανν η διακρίνουσα είναι αρνητική.

Λήμμα 1.2.1. *Το K είναι κλειστό πραγματικό ανν είναι διατεταγμένο και το $K(\sqrt{-1})$ είναι αλγεβρικά κλειστό.*

Θεώρημα 1.2.1 (Μέσης τιμής, Bolzano)**.** *Έστω K ένα κλειστό πραγματικό σώμα, $p \in K[x]$, $a < b \in K$ και $p(a)p(b) < 0$. Τότε υπάρχει $c \in (a, b) : p(c) = 0$.*

1.3 Επίλυση στους πραγματικούς

Η εύρεση των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ή ενός συστήματος τέτοιων εξισώσεων συναντά πλειάδα εφαρμογών σε τομείς όπως η υπολογιστική γεωμετρία, ο σχεδιασμός με υπολογιστή, η ρομποτική κοκ. Μια διάσημη μέθοδος για την εύρεση μιγαδικών ριζών είναι η μέθοδος Newton-Raphson. Εδώ θα ασχοληθούμε με την εύρεση πραγματικών ριζών με αλγεβρικές μεθόδους. Οι δυο κύριες κατηγορίες αλγορίθμων που θα εξεταστούν είναι

- <u>Αλγόριθμοι υποδιαίρεσης:</u> Χονδρικά οι αλγόριθμοι αυτοί δουλεύουν καταμετρώντας τον αριθμό των ριζών σε διαστήματα κατάλληλα μικρού πλάτους. Δηλαδή υποδιαιρούν την πραγματική ευθεία σε αρκούντως μικρά διαστήματα και εντοπίζουν σε ποια από αυτά υπάρχει(μοναδική) πραγματική ρίζα. Έτσι επιστρέφουν στην έξοδο αυτά τα «διαστήματα απομόνωσης». Τα βασικά στοιχεία ενός τέτοιου αλγόριθμου είναι ένα αρχικό φράγμα για τις πραγματικές ρίζες κι ένας τρόπος καταμέτρησης των ριζών. Για την ανάλυσή τους χρειαζόμαστε κι ένα κριτήριο για την απόσταση των ριζών. Η διάκριση τους γίνεται κυρίως με το δεύτερο χαρακτηριστικό τους, τον τρόπο καταμέτρησης των ριζών: πρόκειται κυρίως για μεθόδους Sturm και Descartes. Υπάρχουν επίσης διάφορα φράγματα για τις ρίζες, πχ το φράγμα του Cauchy, η αποτελεσματικότητα των οποίων εξαρτάται κι από την εξίσωση που επιλύεται.

- <u>Αλγόριθμοι προσέγγισης:</u> Αν και η έξοδος εδώ είναι πάλι κάποια διαστήματα, η μέθοδος που ακολουθείται είναι η προσέγγιση ενός πραγματικού αριθμού από ένα συνεχές κλάσμα(continued fraction) με ακέραιους συντελεστές.

Άνθιση γνωρίζουν και μέθοδοι που βασίζονται στην αριθμητική διαστημάτων(Interval Analysis), αλλά η ακρίβειά τους δεν είναι πάντα επαρκώς θεμελιωμένη.

Ένα πολυώνυμο $p(x)$ είναι *χωρίς τετράγωνα* εάν δεν έχει πολλαπλές ρίζες δηλ. εάν η παραγοντοποίησή του σε γραμμικά πολυώνυμα ($\in \mathbb{C}[x]$ ή, γενικότερα, ως προς την αλγεβρική θήκη του σώματος των συντελεστών) δεν περιλαμβάνει κανέναν παράγοντα υψωμένο σε δύναμη. Κάθε παράγων υψωμένος σε δύναμη $k > 1$ στο $p(x)$ εμφανίζεται στην δύναμη $k-1$ στην παράγωγο $p'(x)$. Για κάθε $p(x)$, το πολυώνυμο $p(x)/\gcd(p(x), p'(x))$ είναι χωρίς τετράγωνα και με το ίδιο σύνολο ριζών όπως το $p(x)$. Έτσι όταν μας ενδιαφέρει η εύρεση των ριζών, μπορούμε πάντα να δουλεύουμε (πιθανόν μετά από μια διαίρεση με το ΜΚΔ όπως παραπάνω) με πολυώνυμα χωρίς τετράγωνα.

1.4 Φράγματα ριζών

Το πρώτο ζητούμενο είναι ο εγκλωβισμός όλων των ριζών μιας εξίσωσης σε ένα αρχικό διάστημα. Όπως αναφέρθηκε, σε μια συγκεκριμένη εξίσωση άλλα φράγματα δίνουν μικρότερο διάστημα κι άλλα πιο ευρύ. Παρακάτω συνοψίζονται τα φράγματα που χρησιμοποιούν οι αλγόριθμοι (στο πρώτο τους στάδιο). Το θεώρημα αφορά σε όλες τις ρίζες, ακόμη κι αν αυτές είναι μιγαδικές. Η απαίτηση να είναι το πολυώνυμο μονικό δεν είναι περιοριστική, καθώς μπορούμε πάντα να διαιρέσουμε την εξίσωση με το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου.

Θεώρημα 1.4.1. *Κάθε ρίζα α του $p(x) = x^n + \cdots + c_0$, που είναι μονικό (δηλ. με μοναδιαίο μεγιστοβάθμιο συντελεστή $c_n = 1$), φράσσεται ως εξής:*

$$\begin{aligned}
[\textit{Cauchy}1829]: \quad |\alpha| \quad &< 1 + \max_{0\le i<n} \{|c_i|\}, \qquad |\alpha| \le \max_{0\le i<n} \left\{ |nc_i|^{\frac{1}{n-i}} \right\}, \\
[\textit{Zassenhaus}]: \quad |\alpha| \quad &\le 2 \max_{0\le i<n} \left\{ |c_i|^{\frac{1}{n-i}} \right\}, \\
[\textit{Yap00, lect. VI}]: \quad |\alpha| \quad &\le \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} \max_{0\le i<n} \left\{ \left| \frac{\sqrt[n-i]{c_i}}{\binom{n}{n-i}} \right| \right\}, \\
[\textit{Landau}]: \quad |\alpha| \quad &\le \left(c_0^2 + \cdots + c_{n-1}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Το 1ο φράγμα Cauchy, αν $|\alpha| \le 1$, ισχύει τετριμμένα. Αλλιώς έχουμε

$$|\alpha|^n = |-c_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - c_0| \le \max\{|c_i|\}(|\alpha|^{n-1} + \cdots + 1) = \max\{|c_i|\}\frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} < \frac{\max\{|c_i|\}|\alpha|^n}{|\alpha| - 1},$$

που δίνει το φράγμα. Οι υπόλοιπες αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση. □

Άσκηση 1.4.1. *Για κάθε φράγμα παραπάνω, βρείτε ένα πολυώνυμο για το οποίο το φράγμα αυτό είναι καλύτερο από τα υπόλοιπα.*

Όταν θεωρούμε μόνο τις θετικές ρίζες, μια βελτίωση του 2ου φράγματος του Cauchy υπάρχει στο [Kioustelidis]: $\alpha \le 2\max_{0\le i<n, c_i<0} \left\{ |c_i|^{\frac{1}{n-i}} \right\}$, όπου το μέγιστο λαμβάνεται από όλους τους αρνητικούς συντελεστές. Επιπλέον φράγματα υπάρχουν στην βιβλιογραφία, βλ. π.χ. [Tsi06, Zip93].

Ορίζουμε το ανάστροφο πολυώνυμο $q(x) = x^n p(1/x)$ και εξετάζουμε τις μη-μηδενικές ρίζες. Έστω ανώτερο φράγμα φ στη μέγιστη ρίζα του $q(x)$, την οποία συμβολίζουμε με α, δηλ. $q(\alpha) = 0 = \alpha^n p(1/\alpha) \Rightarrow 1/\varphi$ αποτελεί κατώτερο φράγμα στην ελάχιστη ρίζα ($= 1/\alpha$) του $p(x)$.

Πόρισμα 1.4.1.

$$\begin{aligned}
&|\alpha| > \frac{|c_0|}{1 + \max_{1\le i\le n}\{|c_i|\}}, \quad |\alpha| \ge 1/\max_{1\le i\le n} \left\{ \left| \frac{nc_i}{c_0} \right|^{\frac{1}{n-i}} \right\}, \\
&|\alpha| \ge \frac{1}{2} \max_{1\le i\le n} \left\{ \left| \frac{c_i}{c_0} \right|^{\frac{1}{n-i}} \right\}, \qquad |\alpha| \ge |c_0| / \left(c_1^2 + \cdots + c_n^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Αφήνεται σαν άσκηση η «αναστροφή» του φράγματος του Yap.

Παράδειγμα 1.4.1. *Δίνεται* $p = x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x + 1/2 + i\sqrt{11/2})(x + 1/2 - i\sqrt{11/2})$. *Ανώτατα όρια στις πραγματικές ρίζες: Cauchy:* $1 + \max\{2, 3\} = 4$, $\max\{6^{1/2}, 9^{1/3}\} = \max\{2.45, 2.0801\} = 2.45$ *(που είναι και το καλύτερο άνω φράγμα), Zassenhaus:* $2 \cdot \max\{1.414, 1.4423\} = 2.8845$.

Ανώτατα όρια στις ρίζες του $q(x) = x^3 p(1/x)$*: Cauchy:* $1 + \max\{1/3, 2/3\} = 5/3, \max\{1, 2\} = 2$. *Zassenhaus:* $2\max\{0.69, 2/3\} = 1.3867$. *Επομένως το καλύτερο κατώτερο όριο που συνάγεται είναι* $1/1.3867 = 0.7211$.

Αφήνεται σαν άσκηση η χρήση των φραγμάτων των Yap, Landau.