ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Χρησιμοποιείστε το κριτήριο MMSE για τον υπολογισμό των συντελεστών ενός εξισωτή με πέντε συντελεστές, τους C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2 σε ένα σύστημα βασικής ζώνης αν οι μη μηδενικοί συντελεστές του ισοδύναμο ψηφ. φίλτρου του καναλιού είναι οι:

x_{-1}	x_0	x_1	x_2
-0.63	0.8	0.0	-0.45

Δίνεται ότι η φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού είναι $N_0/2=0.1$ Watt/Hz και ότι $E[\alpha_m^2]=1$ $\{\alpha_m\}$ η ακολουθία συμβόλων που λαμβάνεται.

<u>Υπόδειξη</u>

Η ακολουθία δειγμάτων στην έξοδο του αναλογικού φίλτρου λήψης y_m m=…,0,1,2,…,με την ISI που υπάρχει στην περίπτωση της άσκησης 8.48, δίνεται από τη σχέση

$$y_m = \sum_{n=-1}^{1} x_n a_{m-n} + v_m$$

Δεχθείτε ότι $\sigma_v^2=N_0/2$.

Καθώς τα x_i είναι γνωστά από τα δεδομένα της άσκησης, είναι εύκολος ο προσδιορισμός των $R_{yy}(n)$ και $R_{y\alpha}(n)$ n=-1,0,1 από τις σχέσεις:

$$R_{yy}(n)= R_{yy}(-n)=E[y_m y_{m-n}] \quad \text{και } R_{y\alpha}(n) =E[y_m \alpha_{m-n}]$$

Τις παραστάσεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα αν προσέξουμε ότι τα δεδομένα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και επίσης είναι ασυσχέτιστα με τις τυχαία μεταβλητή v_m και αν δεχθούμε επίσης ότι:

$$E[v_m v_{m-j}] =0 \text{ όταν } j \neq 0 \text{ και } \sigma^2 \text{ όταν } j=0.$$

Υπολογίστε λοιπόν τα y_m συναρτήσει των στοιχείων των $\{\alpha_n\}$,$\{x_n\}$ και $\{v_n\}$ και στη συνέχεια τις αναμενόμενες τιμές ώστε να προκύψουν οι συντελεστές του συστήματος MMSE.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Χρησιμοποιείστε το κριτήριο MMSE για τον υπολογισμό των συντελεστών ενός εξισωτή με πέντε συντελεστές, τους C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2 σε ένα σύστημα βασικής ζώνης αν οι μη μηδενικοί συντελεστές του ισοδύναμο ψηφ. φίλτρου του καναλιού είναι οι:

x_{-1}	x_0	x_1	x_2
-0.63	0.8	0.0	-0.45

Δίνεται ότι η φασματική πυκνότητα θορύβου του καναλιού είναι $N_0/2=0.1$ Watt/Hz και ότι $E[\alpha_m^2]=1$ $\{\alpha_m\}$ η ακολουθία συμβόλων που λαμβάνεται.

Απάντηση

$$E\{(z_m-\alpha_m)^2\}=E\left[\left(\sum_{n=-2}^{2} c_n y_{m-n} - a_m\right)^2\right]=\sum_{n=-2}^{2}\sum_{k=-2}^{2} c_n c_k R_y(n-k) - 2\sum_{k=-2}^{2} c_k R_{ay}(k)+\sigma_\alpha^2$$

και παραγογίζοντας ως προς τους άγνωστους συντελεστές και εξισώνοντας με το 0 προκύπτει το σύστημα :

$$c_{-2}R_y(0)+ c_{-1}R_y(1)+ c_0R_y(2)+c_1R_y(3)+c_2R_y(4)= R_{ay}(-2)$$
$$c_{-2}R_y(-1)+ c_{-1}R_y(0)+ c_0R_y(1)+c_1R_y(2)+c_2R_y(3)= R_{ay}(-1)$$
$$c_{-2}R_y(-2)+ c_{-1}R_y(-1)+ c_0R_y(0)+c_1R_y(1)+c_2R_y(2)= R_{ay}(0)$$
$$c_{-2}R_y(-3)+ c_{-1}R_y(-2)+ c_0R_y(-1)+c_1R_y(0)+c_2R_y(1)= R_{ay}(1)$$
$$c_{-2}R_y(-4)+ c_{-1}R_y(-3)+ c_0R_y(-2)+c_1R_y(-1)+c_2R_y(0)= R_{ay}(2)$$

όπου

$R_{ay}(2)=E[\alpha_m y_{m-2}]=E[\alpha_m(-0.63\alpha_{m-1}+0.8\alpha_{m-2}-0.45\alpha_{m-4}+v_{m-2})]=0$

$R_{ay}(1)=E[\alpha_m y_{m-1}]=E[\alpha_m(-0.63\alpha_m+0.8\alpha_{m-1}-0.45\alpha_{m-3}+v_{m-1})]=-0.63\sigma_\alpha^2=-0.63$

$R_{ay}(0)=E[\alpha_m y_m]= E[\alpha_m(-0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m\ 0.45\alpha_{m-2}+v_m)]= 0.8\sigma_\alpha^2=0.8$

$R_{ay}(-1)=E[\alpha_m y_{m+1}]=E[\alpha_m(-0.63\alpha_{m+2}+0.8\alpha_{m+1}-0.45\alpha_{m-1}+v_{m+1})]=0$

$R_{ay}(-2)=E[\alpha_m y_{m+2}]=E[\alpha_m(-0.63\alpha_{m+3}+0.8\alpha_{m+2}-0.45\alpha_m+v_{m+2})]=-0.45\sigma_\alpha^2=-0.45$

$R_y(-4)=R_y(4)=E[y_m y_{m-4}]=E[(-0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m-0.45\alpha_{m-2}+v_m)(-0.63\alpha_{m-3}+0.8\alpha_{m-4}-0.45\alpha_{m-6}+v_{m-4})]=$
$=0.00$

$R_y(-3)=R_y(3)=E[y_m y_{m-3}]=E[(-0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m-0.45\alpha_{m-2}+v_m)(-0.63\alpha_{m-2}+0.8\alpha_{m-3}-0.45\alpha_{m-5}+v_{m-3})]=$
$=0.45\times0.63\sigma_\alpha^2=0.284$

$R_y(-2)=R_y(2)=E[y_m y_{m-2}]=E[(-0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m-0.45\alpha_{m-2}+v_m)(-0.63\alpha_{m-1}+0.8\alpha_{m-2}-0.45\alpha_{m-4}+v_{m-2})]=$
$=-0.45\times0.8\sigma_\alpha^2=-0.36$

$R_y(-1)=R_y(1)=E[y_m y_{m-1}]=E[(-0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m-0.45\alpha_{m-2}+v_m)(-0.63\alpha_m+0.8\alpha_{m-1}-0.45\alpha_{m-3}+v_{m-1})]=$
$=-0.8\times0.63\ \sigma_\alpha^2=-0.504$

$R_y(0)=E[y_m y_m]=E[(-0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m-0.45\alpha_{m-2}+v_m)(0.63\alpha_{m+1}+0.8\alpha_m-0.45\alpha_{m-2}+v_m)]$
$=[(0.63)^2+(0.8)^2+(0.45)^2]\sigma_\alpha^2+\sigma_v^2=1.24+0.1=1.34$

➔(Δεχόμενοι $\sigma_\alpha^2=1$ και επειδή $\sigma_v^2=N_0/2=0.1$)

$$\begin{bmatrix} 1.34 & -0.504 & -0.36 & 0.284 & 0 \\ -0.504 & 1.34 & -0.504 & -0.36 & 0.284 \\ -0.36 & -0.504 & 1.34 & -0.504 & -0.36 \\ 0.284 & -0.36 & -0.504 & 1.34 & -0.504 \\ 0 & 0.284 & -0.36 & -0.504 & 1.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0 \\ 0.8 \\ -0.63 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας συντελεστών είναι Toeplitz Πίνακας! Εδώ βέβαια η επίλυση του συστήματος γίνεται με μέθοδο Gauss.

➔ $(c_{-2}\ c_{-1}\ c_0\ \ c_1\ c_2)=(-0.1121\ \ 0.0972\ \ 0.5400\ \ \ -0.1984\ \ \ 0.0498)$