Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

3 Σεπτεμβρίου 2013

Θέμα 1. [25 Βαθμοί] Σε έναν διαγωνισμό ζωγραφικής συμμετέχουν 13 αγόρια και 10 κορίτσια, και δίνονται 8 έπαθλα. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν ισοβαθμίες, και όλες οι δυνατές κατατάξεις είναι ισοπίθανες. Τα έπαθλα είναι 2000, 1500, 1000 Ευρώ για τον πρώτο δεύτερο και τρίτο καλύτερο διαγωνιζόμενο αντίστοιχα, ενώ οι επόμενοι 5 σε επίδοση κερδίζουν 500 ευρώ ο καθένας.

(α) Πόσοι οι διαφορετικοί δυνατοί τρόποι απονομής των 8 επάθλων;

(β) Ποιά η πιθανότητα τα τρία πρώτα έπαθλα να κερδηθούν από κορίτσια ενώ τα υπόλοιπα πέντε από αγόρια.

Θέμα 2. [20 Βαθμοί] Μία κάλπη περιέχει 100 νομίσματα. Από αυτά, τα 50 φέρνουν ''Γράμματα'' με πιθανότητα 1/2, τα 30 με πιθανότητα 1/6, και τα υπόλοιπα 20 με πιθανότητα 1/5. Επιλέγουμε ένα νόμισμα από αυτά στην τύχη και το ρίχνουμε. Ποιά η πιθανότητα να φέρει ''Γράμματα'';

Θέμα 3. [20 Βαθμοί] Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} re^{-rx} & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$$

όπου $r \in (0, \infty)$ είναι μια γνωστή σταθερά.

(α) Ποιά είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $1/X$;

(β) Για ποιές τιμες του $a \in \mathbb{R}$ είναι η μέση τιμή $\mathbf{E}(e^{aX})$ πεπερασμένη; Για αυτές τις τιμές, να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(e^{aX})$.

Θέμα 4. [25 Βαθμοί] Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ax & \text{αν } (x, y) \in (0, 2) \times (0, 2), \\ 0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $a \in (0, \infty)$ είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν οι τιμές των

(α) a

(β) $\mathbf{P}(X < 1 \mid Y < X)$

(γ) $\mathbf{E}\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Θέμα 5. [20 Βαθμοί] Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με κατανομή $\Gamma(3, 1/r)$ όπου $r \in (0, \infty)$ είναι άγνωστη παράμετρος.

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου r.

(β) Είναι η εκτιμήτρια της r που προσδιορίστηκε στο (α) αμερόληπτη;

Δίνεται ότι η κατανομή $\Gamma(a, \theta)$ έχει πυκνότητα

$$\frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \mathbf{1}_{x>0},$$

μέση τιμή a/θ, και διασπορά a/θ^2.

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια 2.5 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

1. (α) $(23)_3\binom{20}{5}$

(β)

$$\frac{(10)_3\binom{13}{5}}{(23)_3\binom{20}{5}}$$

2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

$$\frac{50}{100}\frac{1}{2}+\frac{30}{100}\frac{1}{6}+\frac{20}{100}\frac{1}{5}=\frac{34}{100}.$$

3. (α) Η $Y := 1/X$ έχει πυκνότητα

$$f_Y(t)=\begin{cases}\frac{r}{t^2}\,e^{-r/t} & \text{αν } t>0,\\ 0 & \text{αν } t\le 0.\end{cases}$$

(β)

$$\mathbf{E}(e^{aX})=\begin{cases}\frac{r}{r-a} & \text{αν } a<r,\\ \infty & \text{αν } a\ge r.\end{cases}$$

4. (α)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=1\Rightarrow a=1/4$$

(β)

$$\mathbf{P}(X<1\mid Y<X)=\frac{\mathbf{P}(X<1,Y<X)}{\mathbf{P}(Y<X)}=\frac{\int_0^1\int_0^x ax\,dy\,dx}{\int_0^2\int_0^x ax\,dy\,dx}=\frac{a\int_0^1 x^2\,dx}{a\int_0^2 x^2\,dx}=\frac{1}{8}$$

(γ)

$$\mathbf{E}\left(\frac{Y}{X}\right)=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{y}{x}f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\int_0^2\int_0^2 ay\,dy\,dx=2a\int_0^2 y\,dx=4a=1$$

5. (α) Για $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$, έχουμε

$$\log\{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\}=-3n\log r-n\log\Gamma(3)+2\log(x_1\cdots x_n)-\frac{1}{r}(x_1+\cdots+x_n).$$

Το μέγιστο ως προς r πιάνεται στο σημείο

$$\hat r=\frac{x_1+\cdots+x_n}{3n}.$$

Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η

$$T(X_1,\ldots,X_n)=\frac{X_1+\cdots+X_n}{3n}.$$

(β) Η T είναι αμερόληπτη γιατί

$$\mathbf{E}T(X_1,\ldots,X_n)=\frac{1}{3}\,\mathbf{E}(X_1)=r.$$