

**Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής**  
**Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών**  
**4 Σεπτεβρίου 2012**

**Θέμα 1.** [15 Βαθμοί] Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο, δίκαιο ζάρι 5 φορές διαδοχικά. Ποιές οι πιθανότητες

(α) Και οι πέντε ενδείξεις να είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

(β) Οι δύο πρώτες ενδείξεις να είναι ίδιες, και οι επόμενες τρεις να είναι διαφορετικές από τις δύο πρώτες.

**Θέμα 2.** [25 Βαθμοί] Έστω  $X$  συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} x/8 & \text{αν } x \in (0, c), \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $c \in (0, \infty)$  είναι μια σταθερά.

(α) Ποιά είναι η τιμή της  $c$ ;

(β) Τι τιμές παίρνει η τυχαία μεταβλητή  $1/X$ ; Ποιά είναι η πυκνότητά της;

(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή  $E(e^{2X}/X)$ .

**Θέμα 3.** [25 Βαθμοί] Έχει παρατηρηθεί ότι τα στατιστικά αποφοίτησης των φοιτητών του τμήματος πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών συμφωνούν με την υπόθεση ότι ο αριθμός των εξαμήνων επιπλέον των 8 που χρειάζεται ένας φοιτητής για να αποφοιτήσει είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda = 2$ . Μας δίνεται ότι η πιθανότητα σε ένα δεδομένο σύνολο  $n$  φοιτητών ο μέσος επιπλέον χρόνος για την αποφοίτηση να είναι περισσότερο από 2.466 εξάμηνα ισούται με 1%. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η τιμή του  $n$ .

**Θέμα 4.** [25 Βαθμοί] Έστω  $(X, Y)$  διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{αν } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Για  $y \in (0, 1)$  σταθερό, ποιά είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας  $f_{X|Y}$  της  $X|Y = y$ ;

(β) Είναι οι  $X, Y$  ανεξάρτητες;

**Θέμα 5.** [20 Βαθμοί] Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{αν } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $p \in (0, 1)$  μία άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου  $p$ .

**Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής,  $N(0, 1)$ :**

$$\begin{aligned} \Phi(0.5) &= 0.6915, & \Phi(1) &= 0.8413, & \Phi(1.5) &= 0.9332, \\ \Phi(2) &= 0.9773, & \Phi(2.33) &= 0.99, & \Phi(3) &= 0.9987, \\ \Phi(1.65) &= 0.95, & \Phi(1.96) &= 0.975 \end{aligned}$$

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια  $2 \frac{1}{2}$  ώρες.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**