

ΣΧΟΛΙΟ ΣΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Στην τάξη περιγράψαμε μια μεθοδολογία για την εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης για μια παράμετρο  $\theta$  που εμπλέκεται στην κατανομή ενός δείγματος  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Η αναφορά σε εκτιμητήρια για την παράμετρο  $\theta$  μπερδεύει, αλλά για το επίπεδο του μαθήματος μας μπορούμε να την αγνοήσουμε, και αυτό έκανα σε όλα τα παραδείγματα στην τάξη. Έτσι η μεθοδολογία είναι η εξής.

**A.** Βρίσκουμε μία έκφραση  $g(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$  τέτοια ώστε:

- (1) Να εμπλέκει τις τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_n$
- (2) Να εμπλέκει την παράμετρο  $\theta$ .
- (3) Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $Y := g(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$  να μην εμπλέκει την παράμετρο  $\theta$ . π.χ. να είναι εκθετική με παράμετρο 1.

Το (3) είναι το δύσκολο σημείο της διαδικασίας.

**B.** Βρίσκουμε σταθερές  $c_1, c_2$  ώστε

$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = 1 - \alpha.$$

**Γ.** Έπειτα μετασχηματίζουμε ισοδύναμα την διπλή ανισότητα  $c_1 \leq Y \leq c_2$  σε μια διπλή ανισότητα για το  $\theta$  (συνήθως αυτό είναι δυνατόν), δηλαδή

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Το τυχαίο διάστημα  $[L(X_1, X_2, \dots, X_n), U(X_1, X_2, \dots, X_n)]$  είναι αυτό που ψάχνουμε, δηλαδή ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το  $\theta$  με συντελεστή εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$ .

Με τα πράγματα που έχουμε δει, εκτός αν σε μια άσκηση υπάρχει κάποιο στοιχείο που να μας βοηθάει στο (3) του μέρους **A** πιο πάνω, το μόνο εφόδιο που έχουμε είναι το κεντρικό οριακό θεώρημα<sup>1</sup>. Το επικαλούμαστε λοιπόν, και λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$$Y := \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

(όπου  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ,  $\mu := E(X_1)$ ,  $\sigma^2 := V(X_1)$ ), έχει προσεγγιστικά κατανομή  $N(0, 1)$ , και άρα δεν εμπλέκει καμία άγνωστη παράμετρο. Η τυχαία μεταβλητή  $Y$  συνήθως περιέχει την παράμετρο για την οποία αναζητούμε διάστημα εμπιστοσύνης<sup>2</sup>, και με αυτήν προχωράμε στα βήματα **B**, **Γ** πιο πάνω.

Κοιτάξτε τώρα τα παραδείγματα από τις σημειώσεις του μαθήματος, το θέμα 6 από το τεστ εξάσκησης, και το θέμα 7 από τα θέματα του Φεβρουαρίου.

<sup>1</sup>Η βασική συνθήκη για το οποίο είναι η διασπορά της  $X_1$  να είναι πεπερασμένη και όχι 0. Αυτό θα ισχύει στις περιπτώσεις που θα σας ζητηθούν.

<sup>2</sup>Η παράμετρος θα εμφανίζεται στο  $\mu$  ή στο  $\sigma$ .